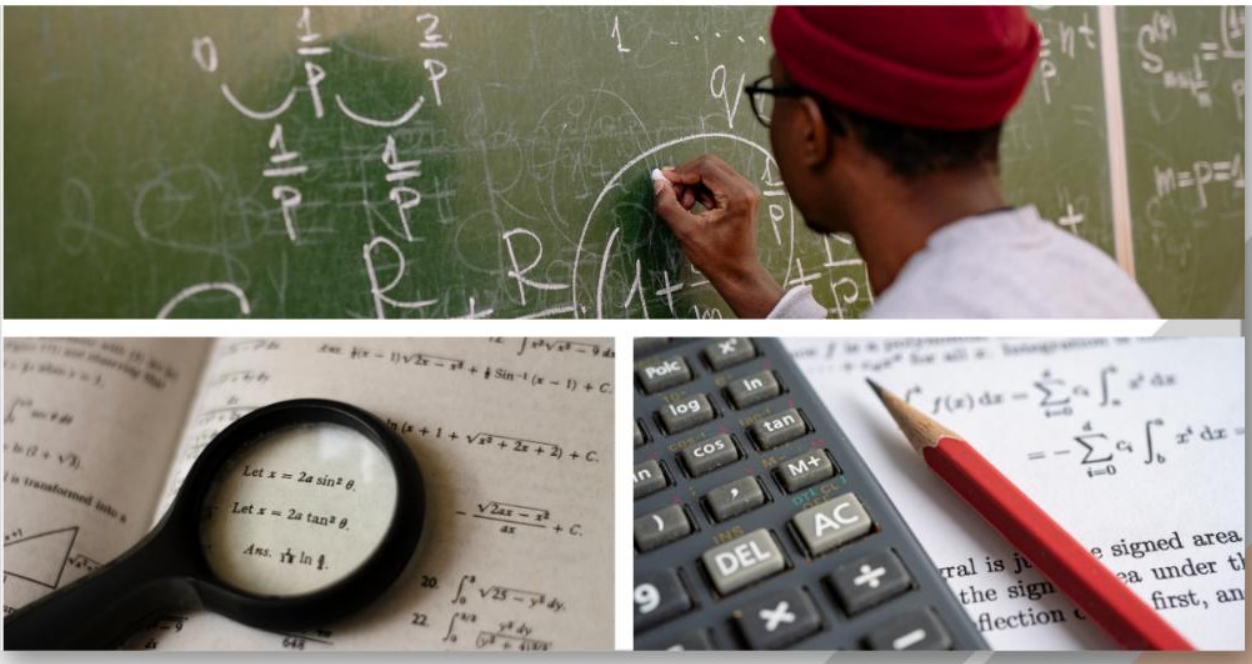
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

Memorias Científicas del

I CONGRESO INTERNACIONAL

De Ciencias Puras y Naturales (CI-FCPN)

19, 20 Y 21 de mayo del 2026



Área de Matemáticas

LA PAZ - BOLIVIA
2026

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
MEMORIAS CIENTÍFICAS DEL I CONGRESO INTERNACIONAL DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES (CI-FCPN)
- ÁREA DE MATEMÁTICAS -

REGISTRO:

ISBN: 978-9917-0-7793-0

DEPOSITO LEGAL: 4-4-35-2026-PO

DIRECCIÓN: Av. Villazón No. 1995, Monoblock Central de la UMSA – Edif. Antiguo

EDICIÓN: PRIMERA

EQUIPO TÉCNICO:

Diagramación:

- M.Sc. Augusto Cesar Lunasco Cusi
- M.Sc. Wilson Felipe Alarcon quispe
- Univ. Efrain Hugo Chipana Tito
- Univ. Jose Andres Aruquipa Coca
- Univ. Alejandra belen huanca cazas

Diseño de cubierta: Univ. Alejandra belen huanca cazas

Todos los derechos reservados.

Está prohibida cualquier reproducción y/o difusión total o parcial de este libro, en cualquier forma, por medios mecánicos, electrónicos, inclusive por fotocopias grabación magnetofónica y cualquier sistema de almacenamiento de información. penado por la ley de acuerdo a disposiciones en vigencia (derechos de autor, ley nro. 1322 del 13 de abril de 1992). Salvo consentimiento del autor.

La Paz – Bolivia

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS

PH.D. MARÍA EUGENIA GARCÍA MORENO
RECTORA

DR. TITO ESTÉVEZ MARTINI
VICERRECTOR

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

M.SC. ALDO RAMIRO VALDEZ ALVARADO
DECANO

PH.D. ADRIANA MIRIAM MALLEA MORALES
VICEDECANA

COMITÉ CIENTÍFICO (CI – FCPN)

PH.D. ADRIANA MIRIAM MALLEA MORALES	COORDINACIÓN GENERAL
DR. PORFIRIO SUÑAGUA SALGADO	PRESIDENTE DEL COMITÉ CIENTÍFICO – CARRERA DE MATEMÁTICA
M.SC. WINDER ANDRES CANEZO GOMEZ	CARRERA DE BIOLOGÍA
LIC. RAQUEL CHAMA RODRIGUEZ	CARRERA DE CIENCIAS QUÍMICAS
PH.D. EVARISTO MAMANI CARLO	CARRERA DE FÍSICA
PH.D. REYNALDO JAVIER ZEBALLOS DAZA	CARRERA DE INFORMÁTICA
PH.D. MOISES MARTIN SILVA CHOQUE	CARRERA DE INFORMÁTICA
M.SC. FERNANDO ODAY RIVERO SUGUIURA	CARRERA DE ESTADÍSTICA
M.SC. AUGUSTO CESAR LUNASCO CUSI	UNIDAD FACULTATIVA DE FOMENTO A LA INVESTIGACIÓN - UFFI
M.SC. WILSON FELIPE ALARCON QUISPE	UNIDAD DE GESTIÓN E INNOVACIÓN DEL DESARROLLO ACADÉMICO - UGIDA

INDICE

Presentación 1

CONFERENCIAS MAGISTRALES Y PLENARIAS 3

TEORÍA DE CONGLOMERADOS DE INCIDENCIA: UNA PROPUESTA FORMAL PARA LA GENERALIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA 4

(Plenaria) 4

Lic. ALBERDI BAPTISTA ANDRÉS 4

INDICADORES CUANTITATIVOS PARA VARIABLES CUALITATIVAS: SOBRE LA EQUIVALENCIA ENTRE PCA Y MCA PARA VARIABLES BINARIAS 9

(Plenaria) 9

M. Sc. ERNESTO EUSEBIO CUPÉ CLEMENTE 9

ESTABILIDAD Y BUEN PLANTEAMIENTO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS 13

(Plenaria) 13

Dr. RUBÉN LÓPEZ MONTOYA 13

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (SVD): APLICACIONES EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL, APRENDIZAJE ESTADÍSTICO Y ECONOMÍA 16

(Plenaria) 16

M. Sc. MARIO AMILCAR MIRANDA GONZALES 16

SERIES DE POTENCIAS ASOCIADAS CON RECÍPROCOS DE COEFICIENTES BINOMIALES CENTRALES GENERALIZADOS 21

(Plenaria) 21

RIMER MAURICIO ZURITA ORELLANA 21

COMUNICACIONES CIENTÍFICAS 46

SÍNTESIS DE CONTROLADORES ROBUSTOS POR REALIMENTACIÓN DE SALIDA BASADA EN OBSERVADORES Y ABSTRACCIÓN SIMBÓLICA: TEORÍA DE CONTROL Y MÉTODOS FORMALES 47

(Comunicación) 47

PhD. W. ALEJANDRO APAZA-PEREZ, ANTOINE GIRARD 47

ANÁLISIS RECONSTRUCTIVO DE PATRONES DE MANCHAS DE SANGRE MEDIANTE EL MÉTODO TRIGONOMÉTRICO EN DISTINTOS TIPOS DE SOPORTE 58

(Comunicación) 58

M. Sc. BERNAL A. & CHOQUE O 58

¿PUEDE UN MISIL BALÍSTICO DE LA GUERRA FRÍA Y LA UTILIDAD MARGINAL CONVENCER A UNA HERMOSA DAMA DE IR AL CINE? 74

(Comunicación).....74
Univ. CALLISAYA CONDORI ALBERT 74
DISEÑO Y SIMULACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE UN IMPLANTE DENTAL CÓNICO CON CONEXIÓN CONE MORSE PARA CONDICIONES DE HUESO TIPO III: ANÁLISIS COMPARATIVO FRENTE AL HEXÁGONO EXTERNO 93
(Comunicación).....93
M. Sc. MALDONADO NOGALES, Melisa 93
BASE AVANZADA INDUCIDA POR PRECONDICIONADOR SEPARADOR PARA CROSSOVER EN PROGRAMACIÓN LINEAL 100
(Comunicación).....100

Presentación

Con gran satisfacción presentamos las Memorias Científicas del I Congreso Internacional de Ciencias Puras y Naturales (CI-FCPN), publicación que reúne y preserva una selección de los trabajos de investigación presentados durante las jornadas académicas desarrolladas los días 19, 20 y 21 de mayo, en el marco de este importante encuentro científico organizado por la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés (FCPN–UMSA).

El I Congreso Internacional de Ciencias Puras y Naturales (CI-FCPN) se constituyó en un espacio de encuentro, intercambio y difusión del conocimiento científico, congregando a investigadores, docentes, profesionales y estudiantes en torno a las principales problemáticas, avances y perspectivas de las ciencias puras, la tecnología y la innovación, su desarrollo permitió fortalecer el diálogo académico y científico, generando un escenario propicio para la presentación de resultados de investigación y el establecimiento de vínculos entre diferentes comunidades académicas.

Las presentes memorias constituyen un registro documental de la producción científica presentada durante el Congreso, organizada en las áreas de Biología, Estadística, Física, Informática, Matemáticas y Química, cada una de estas áreas representa un componente fundamental del quehacer científico de la Facultad y, al mismo tiempo, refleja la diversidad de enfoques, metodologías, problemas de investigación y resultados que caracterizan a las ciencias puras y sus aplicaciones.

La recopilación de estos trabajos tiene como propósito fundamental preservar, sistematizar y difundir el conocimiento científico generado y socializado durante el evento, proporcionando a investigadores, docentes, estudiantes y demás miembros de la comunidad académica una fuente de consulta que permita conocer las investigaciones presentadas y favorecer su posterior análisis, discusión y aprovechamiento académico.

La publicación de estas memorias adquiere, además, especial relevancia como instrumento de memoria institucional, puesto que documenta una experiencia académica y científica que contribuye al fortalecimiento de la investigación y la innovación en la Facultad de Ciencias Puras y Naturales, en este sentido, la memoria trasciende la función de recopilar trabajos científicos y se constituye en un testimonio del compromiso institucional con la generación, difusión y transferencia del conocimiento.

El desarrollo del Congreso fue posible gracias a la participación y colaboración de investigadores, docentes, estudiantes, autoridades universitarias, personal administrativo y equipos de apoyo, cuyo esfuerzo conjunto permitió llevar adelante las actividades académicas

y científicas programadas, a todos ellos expresamos nuestro reconocimiento por su contribución al fortalecimiento de este espacio de intercambio científico.

De manera particular, esta publicación representa una oportunidad para visibilizar el trabajo de los investigadores y jóvenes científicos, reconociendo el valor de sus aportes y promoviendo una cultura académica orientada hacia la investigación, la innovación, la colaboración interdisciplinaria y la comunicación científica.

Asimismo, estas memorias constituyen una base para proyectar futuras iniciativas académicas y científicas, favoreciendo la continuidad de espacios de encuentro entre investigadores de diferentes disciplinas e instituciones, la generación y difusión sistemática de este tipo de productos contribuye a consolidar una comunidad científica activa y comprometida con los desafíos contemporáneos de la ciencia, la tecnología y la innovación.

Invitamos a la comunidad universitaria, científica y académica a consultar estas memorias como una expresión del trabajo investigativo desarrollado en las diferentes áreas de las Ciencias Puras y Naturales, esperamos que los trabajos aquí reunidos sirvan como fuente de referencia, inspiración y punto de partida para nuevas investigaciones, colaboraciones y propuestas que contribuyan al desarrollo científico y tecnológico de nuestra sociedad.

Finalmente, expresamos nuestro reconocimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización del I Congreso Internacional de Ciencias Puras y Naturales (CI-FCPN) y la posterior consolidación de esta publicación, la presente memoria representa no solo el resultado de un encuentro científico, sino también el compromiso permanente de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales con la excelencia académica, la investigación y la construcción colectiva del conocimiento.

COMITÉ ORGANIZADOR

CONFERENCIAS MAGISTRALES Y PLENARIAS

TEORÍA DE CONGLOMERADOS DE INCIDENCIA: UNA PROPUESTA FORMAL PARA LA GENERALIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

(Plenaria)

Lic. ALBERDI BAPTISTA ANDRÉS
andresalberdi@gmail.com

Semblanza:

Javier Andrés Alberdi Baptista es Licenciado en Matemática por la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA). Cuenta con una trayectoria dedicada a la investigación en los fundamentos de la geometría, con especial énfasis en la axiomatización y la extensión del concepto de dimensión. Es el proponente original de la Teoría de Conglomerados, un marco formal desarrollado a partir de inquietudes académicas surgidas en la UMSA desde la década de 1990. Combina su labor científica con diferentes Gerencias, Proyectos y Consultorías sobre Ecosistemas Tecnológicos, AI y Cloud en varias empresas. (https://andresalberdi.github.io/).

Resumen

Introducción: Este trabajo postula la **Teoría de Conglomerados** como un marco conceptual formal que permite la existencia de dimensiones enteras (positivas y negativas) mediante la generalización de los términos primitivos de la Geometría Axiomática. **Metodología:** La investigación emplea una construcción axiomática basada en la **Teoría de Conjuntos ZFC** estándar y lógica clásica, sustituyendo la relación de pertenencia conjuntista por una relación de incidencia binaria t para evitar el Axioma de Fundamentación. **Resultados/Discusión:** Se establece una estructura (C, δ, t) que organiza objetos en **Z-Espacios**. A través de tres axiomas fundamentales (Coherencia, Incidencia y Construcción), la teoría logra demostrar los ocho axiomas de incidencia de Hilbert como casos particulares para dimensiones positivas. Se han desarrollado modelos en los racionales positivos $\mathbb{Q}+$ y cuerpos de fracciones de Dominios de Factorización Única que prueban la consistencia del sistema. Conclusión: La teoría dota de estructura geométrica a diversas áreas del álgebra abstracta y abre la posibilidad de explorar

la estructura interna del punto (dimensiones negativas) de manera no trivial. (https://dimensionesenz.blogspot.com/).

Palabras Clave

Teoría de Conglomerados, Dimensiones Negativas, Axiomas de Incidencia, Z-Espacios, Geometría de Hilbert.

1. Introducción

La geometría ha evolucionado desde las abstracciones prácticas de Babilonia e India hasta la formalización monumental de Euclides y, posteriormente, de David Hilbert y Alfred Tarski. A pesar de estos avances, el concepto de punto ha permanecido mayoritariamente como una entidad atómica e indivisible de dimensión cero.

La importancia de este estudio radica en el reto de trascender la percepción intuitiva de las dimensiones positivas para explorar el espectro completo de los números enteros $\mathbb{Z}$. El problema central abordado es la falta de un soporte formal consistente para dimensiones negativas, a menudo relegadas a contextos artísticos o específicos sin rigor matemático. El objetivo principal es brindar un marco formal, basado exclusivamente en la teoría de conjuntos, que permita definir objetos geométricos (puntos, rectas, planos) y sus análogos en dimensiones superiores o inferiores de manera constructiva y consistente. Esta búsqueda se originó en 1991 en discusiones académicas en la UMSA, consolidándose en la presente propuesta de generalización.

2. Metodología / Desarrollo teórico

2.1 Fundamentación Lógica y Conjuntista

Se utiliza la lógica clásica de primer y segundo orden y la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de Elección (ZFC). Un desafío técnico crucial es el Axioma de Fundamentación de ZFC, que impide construcciones de pertenencia infinitamente embebidas hacia adentro. Para superar esto, la teoría introduce la relación t de incidencia inmediata en lugar de la pertenencia tradicional $\in$.

2.2 Estructura de Conglomerado

Se define un Conglomerado como un par (C, δ) donde C es un conjunto no vacío y δes la función de dimensión δ: C →ℤ. La estructura se completa como una terna (C, δ) que satisface las condiciones:

- D0: Si AtB, entonces δ(B) = δ(A) + 1.
- D1 y D2: Garantizan la existencia de objetos incidentes y no incidentes en dimensiones adyacentes para cada objeto del conglomerado.

2.3 Organización en Z-Espacios y Relación u

El conglomerado se divide en clases de equivalencia por dimensión llamadas **Z-Espacios** [x]. Se define la relación **u de inclusión generalizada**, que es un orden parcial respecto a la congruencia ≅, permitiendo vincular objetos de dimensiones no consecutivas (e.g., un punto en un plano).

2.4 Operadores Flecha e Incidencia

La teoría introduce los operadores **flecha arriba (↑)** y **flecha abajo (↓)**, que abstraen las nociones de espacio formado (span) y espacio coincidente (intersección). La relación fundamental entre dimensiones se expresa en la **Ecuación Fundamental**: δ(A↑B) = δ(A) +δ(B) -δ(A↓B). Esta fórmula permite calcular incidencias incluso cuando el resultado arroja dimensiones negativas.

3. Resultados y discusión

3.1 Generalización de los Axiomas de Hilbert

Uno de los hallazgos más significativos es la prueba de que los **axiomas de incidencia de Hilbert** son teoremas dentro de la Teoría de Conglomerados cuando se restringe el análisis a las dimensiones 0, 1, 2 y 3. Por ejemplo, el axioma que establece que "dos puntos determinan una recta" se formaliza mediante la aplicación del operador flecha arriba a dos objetos de dimensión cero, resultando en un objeto único (salvo congruencia) de dimensión uno.

3.2 Dimensiones Negativas y la Estructura del Punto

La teoría permite concebir formalmente los **objetos de dimensión negativa**. Un ejercicio teórico muestra que, siguiendo la lógica de la teoría, se puede describir la incidencia de estos objetos dentro de lo que tradicionalmente se considera el punto atómico. Esto sugiere que el

punto, en este marco, posee una "atomicidad" compuesta por estructuras de dimensiones inferiores.

3.3 Consistencia y Modelos Matemáticos

Para evitar la inconsistencia, se han construido modelos que vinculan la teoría con ramas consistentes del álgebra:

- **Modelo en $\mathbb{Q}+$:** Utiliza la divisibilidad de enteros y el teorema fundamental de la aritmética para mapear dimensiones en números racionales.
- **Modelo en DFUs:** Generaliza el anterior a Cuerpos de Fracciones de Dominios de Factorización Única, dotando de una geometría de incidencia a estructuras como los enteros gaussianos o anillos de polinomios.

3.4 Perspectiva Categórica

Recientemente, se ha determinado que los Conglomerados de Incidencia pueden considerarse Categorías de Preorden (delgadas), donde los morfismos están definidos por la relación u Esto permite el uso de herramientas de la Teoría de Categorías, como pullbacks y pushouts, para representar las operaciones flecha.

4. Conclusión

La **Teoría de Conglomerados** constituye un avance significativo en los fundamentos de la geometría al proporcionar un sistema axiomático que unifica el tratamiento de dimensiones positivas y negativas.

Los hallazgos principales demuestran que:

1. Es posible construir una geometría consistente no trivial que prescinde de la atomicidad del punto y se apoya en la **Teoría de Conjuntos estándar**.
2. La **Ecuación Fundamental de Dimensiones** rige la incidencia en todo el espectro de $\mathbb{Z}$, proporcionando una herramienta de cálculo geométrico universal.
3. La existencia de modelos algebraicos en **Dominios de Factorización Única** valida la no trivialidad de la propuesta y su aplicabilidad en álgebra abstracta.

En conclusión, el trabajo cumple con el objetivo de elevar la cultura geométrica un "peldaño más" en la escalera dimensional. Como perspectivas futuras, se trabaja en la postulación de

los **Axiomas de Orden de Hilbert** dentro de este esquema, mediante el estudio de conjuntos linealizables y cortaduras de Dedekind.

Referencias bibliográficas

- Alberdi Baptista, A. (2017). *Dimensiones en Z: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría* (Ver. 6.1).
- Artin, E. (1992). *Álgebra Geométrica*. Editorial Limusa. (Original publicado en 1957).
- Canedo, M. (2019). *Dimensiones en Z: Un modelo de Conglomerado en Q+*.
- Canedo, M. (2020). *Modelos de Conglomerado a partir del Cuerpo de Fracciones de un Dominio de Factorización Única*.
- Efimov, N. V. (s.f.). *Geometría Superior*. Editorial Mir.
- Euclides. (300 A.C.). *Los Elementos de la Geometría*.
- Hilbert, D. (1900). *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la Geometría).
- Suppes, P. (s.f.). *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Editorial Norma.
- Tarski, A. (1999). *The Bulletin of Symbolic Logic*, 5(2).

INDICADORES CUANTITATIVOS PARA VARIABLES CUALITATIVAS: SOBRE LA EQUIVALENCIA ENTRE PCA Y MCA PARA VARIABLES BINARIAS

(Plenaria)

M. Sc. ERNESTO EUSEBIO CUPÉ CLEMENTE
ecupe@fcpn.edu.bo

Semblanza:

Investigador del Instituto de Investigación Matemática (IIMAT-UMSA) y docente de la Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA). Consultor de organismos nacionales e internacionales. Publicaciones en revistas nacionales e internacionales. Director del Centro de Investigaciones Económicas y Empresariales (CIEE) de la Universidad Privada Boliviana (UPB). Analista de la Unidad de Análisis de Políticas Económicas (UDAPE). Técnico del Departamento de Cuentas Nacionales del Instituto Nacional de Estadística (INE) y del Centro de Investigación Operativa de Yacimientos Petrolíferos Fiscales Bolivianos (YPFB). Maestría en Matemática Aplicada a la Economía del Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE), México D.F. Licenciatura en Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA).

En general, el Análisis de Componentes Principales (ACP) y el Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM) no son comparables, el primero se aplica a variables cuantitativas y el segundo a variables cualitativas. Sin embargo, en el caso particular de variables binarias, destacados autores del área afirman sin precisión que ambos métodos de análisis de datos son equivalentes. En este artículo se muestra que, en la práctica del análisis de datos binarios, esta situación se refleja en un manejo confuso y hasta contradictorio de estos métodos y se resuelve el problema subyacente, disipando toda posible confusión al momento de las aplicaciones. Concretamente, luego de poner en evidencia la existencia de un problema abierto sobre la equivalencia entre ACP y ACM, a través de un desarrollo riguroso y original se establece una relación lineal entre ACP y ACM. Finalmente, se muestra que ACP y ACM no son

equivalentes cuando se trata de elaborar indicadores cuantitativos para variables cualitativas, excepto en casos muy especiales.

Resumen

En general, el Análisis de Componentes Principales (ACP) y el Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM) no son comparables, el primero se aplica a variables cuantitativas y el segundo a variables cualitativas. Sin embargo, en el caso particular de variables binarias, destacados autores del área afirman sin precisión que ambos métodos de análisis de datos son equivalentes. En este artículo se muestra que en la práctica del análisis de datos binarios, esta situación se refleja en un manejo confuso y hasta contradictorio de estos métodos y se resuelve el problema subyacente, disipando toda posible confusión al momento de las aplicaciones. Concretamente, luego de poner en evidencia la existencia de un problema abierto sobre la equivalencia entre ACP y ACM, a través de un desarrollo riguroso y original se establece una relación lineal entre ACP y ACM. Finalmente, se muestra que ACP y ACM no son equivalentes cuando se trata de elaborar indicadores cuantitativos para variables cualitativas, excepto en casos muy especiales.

Abstract. In general, Principal Component Analysis (PCA) and Multiple Correspondence Analysis (MCA) are not comparable; the former is applied to quantitative variables and the latter to qualitative variables. However, in the specific case of binary variables, prominent authors in the field imprecisely claim that both data analysis methods are equivalent. This article shows that in the practice of binary data analysis, this situation is reflected in a confusing and even contradictory handling of these methods, and it resolves the underlying problem, dispelling any possible confusion during application. Specifically, after highlighting the existence of an open problem regarding the equivalence between PCA and MCA, a rigorous and original development establishes a linear relationship between PCA and MCA. Finally, it is shown that PCA and MCA are not equivalent when it comes to developing quantitative indicators for qualitative variables, except in very special cases.

Palabras clave

Principal Components Analysis, Multiple Correspondence Analysis, Binary Qualitative Variables.

Referencias bibliográficas

- Asselin, L.M. (2015) *Analysis of Multidimensional Poverty. Theory and Case Studies*. Editorial Springer.
- Benzécri, J. P. et al. (1973). *L'analyse des doneeés. L'analyse des correspondances*. Edit. Dunod. Paris.
- Chirinos, A. (2019). *Un Indicador Dinámico Basado en Componentes Principales como Alternativa al Índice de Necesidades Básicas Insatisfechas en los Censos. Caso de Estudio: Bolivia*. Tesis de Maestría. Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) -- Bolivia.
- Cupé, E; Cupé, S. (próximo a publicarse). *Dual Equivalence Between PCA and MCA for Binary Variables.*
- Di Franco, G. (2015). *Multiple correspondence analysis: one only or several techniques?* Journal Quality & Quantity. DOI 10.1007/s11135-015-0206-0. Springer.
- Escoffier, B. and Pagès, J.(2008). *Analyses Factorielles Simples et Multiples: Objectifs, méthodes et interpretation*. Dunod, Paris.
- Feres, J. C. and Mancero, X. (2001). *El Método de las Necesidades Básicas Insatisfechas (NBI) y sus Aplicaciones en América latina*. NN. UU. Chile.
- Greenacre, M. (2016) *Correspondence Analysis in Practice. Third Edition*. Chapman & Hall/CRC
- Greenacre, M. (1984) *Theory and Applications of Correspondence Analysis*. Academic Press.
- Härdle, W.; Simar, L. (2019) *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Springer-Verlag Berlin.
- Jolliffe, I.T. (2002) *Principal Component Analysis, Second Edition*. Springer Series in Statistics.

- Kolenikov, S. & Angeles, G. (2004). *The Use of Discrete Data in PCA: Theory, Simulations, and Applications to Socioeconomic Indices*. Chapel Hill, N.C.: Carolina Population Center MEASURE.
- Lebart, L; Morineau, A.; Piron, M. (1995) *Statistique exploratoire multidimensionnelle*. Dunod, Paris.
- Nishisato, S. (1980). *Analysis of categorical data: Dual scaling and its applications*. University of Toronto Press.
- Pasha, A. (2015). *Regional Perspectives to the Multidimensional Poverty Index*. Courant Research Centre: Poverty, Equity and Growth - Discussion Papers 188, Courant Research Centre PEG.
- Van Loan, Ch. (1976). *Generalizing the Singular Value Decomposition*. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 13. No. 1, March 1976.

ESTABILIDAD Y BUEN PLANTEAMIENTO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

(Plenaria)

Dr. RUBÉN LÓPEZ MONTOYA
rlopezm@academicos.uta.cl

Semblanza

Rubén Luis López Montoya es un matemático boliviano con residencia en Arica, Chile. Egresó del Colegio San Calixto de La Paz en 1988. Estudió tres semestres en la Carrera de Matemática de la Universidad Mayor de San Andrés. Luego realizó sus estudios de pregrado en Matemática y Matemática Aplicada y de Magíster en Ciencias en Física y Matemáticas en la Universidad Estatal de Voronezh V.I. Lenin y en la Universidad Estatal de Moscú M.V. Lomonosov de la Federación Rusa 1990-1996. Posteriormente, realizó sus estudios de doctorado en el Programa de Doctorado en Ciencias Aplicadas con mención en Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción en Concepción, Chile (2000-2005). Actualmente es profesor titular del Departamento de Matemática de la Universidad de Tarapacá en Arica, Chile. Su línea de investigación es la optimización y el análisis variacional.

Resumen

La estabilidad y el buen planteamiento de los modelos matemáticos son aspectos fundamentales en la formulación de problemas dentro de las ciencias aplicadas y la ingeniería. Un modelo bien planteado garantiza que existe una solución, que es única y que depende de manera continua de los datos iniciales, lo cual es esencial para que los resultados sean confiables y útiles. Laestabilidad del modelo matemático asegura que pequeñas perturbaciones o errores en los datos no generen cambios significativos en la solución, lo que resulta crucial en aplicaciones reales donde siempre hay incertidumbre. En conjunto, estos conceptos permiten evaluar la validez y la utilidad de un modelo matemático para describir fenómenos del mundo real.

En esta charla mostraremos el aparato matemático que se desarrollado estos últimos años para estudiar varios modelos matemáticos.

Palabras clave

Existencia de soluciones; estabilidad; buen planteamiento según Hadamard; análisis asintótico; convergencia de conjuntos; convergencia variacional; soluciones aproximadas.

Referencias bibliográficas

- López R., Vera C., On the set of weakly efficient minimizers for convex multiobjective programming. Operations Research Letters, Vol. 36, pp. 651-655, (2008).
- Gutiérrez C, López R., Novo V., Generalized epsilon-quasi solutions in multiobjective optimization problems: existence results and optimality conditions. Nonlinear Analysis, Vol. 72, pp. 4331-4346, (2010).
- López R., Variational convergence for vector valued-functions and its applications to convex multiobjective optimization. Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 78, pp. 1-34, (2013).
- Gutiérrez C, López R., Novo V., Existence and boundedness of solutions in infinite dimensional vector optimization problems. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 162, 515-547, (2014).
- Gutiérrez C., López R., Novo V., On Hadamard well-posedness of families of Pareto optimization problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 444, 881-899, (2016).
- Lara F., López R., Formulas for asymptotic functions via conjugates, directional derivatives and subdifferentials, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 173, 793-811, (2017).
- López R., Sama M., Stability and sensivity analysis for conical regularization of linearly constrained least-squares problems in Hilbert spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 456, 476-495, (2017).

- Lara F., López R., Svaiter B.F., A further study on asymptotic functions via variational analysis, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 182, 366-382, (2019).
- Jadamba B., Khan A.A., López R., Sama M., Conical regularization for multi-objective optimization problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 479, 2056-2075, (2019).
- Gutiérrez C., López R., On the existence of weak efficient solutions of nonconvex vector optimization problems. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 185, 880-902, (2020).
- Hernández E., López R., A new notion of semicontinuity of vector functions and its properties. Optimization, Vol. 69, 1831-1846, (2020).
- Flores-Bazán F., López R., Vera C., Vector asymptotic functions and their application to multiobjective optimization problems. SIAM Journal on Optimization, Vol. 34, 1826-1851, (2024).
- García Y., Goicochea B., López R., Martínez J., Horizon and recession asymptotic notions for sets and mappings: a unified approach, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 205, 33, (2025).
- Gutiérrez C., López R., Convergence notions for vector functions: A unified theory and its application to multiobjective optimization. Submitted for publication (2026).
- López R., Martínez J., Vragas N. Excess and Hausdorff-type distance for sets via the oriented distance function: continuity of operations and morphology. Submitted for publication (2026).
- Gutiérrez C., López R., Martínez J., Variational convergence for vector-valued functions and solid order cone. In progress (2026).

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (SVD): APLICACIONES EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL, APRENDIZAJE ESTADÍSTICO Y ECONOMÍA

(Plenaria)

M. Sc. MARIO AMILCAR MIRANDA GONZALES
mmiranda@ucb.edu.bo

Semblanza:

Estadístico (Científico de Datos) y candidato a Magíster en Análisis y Ciencia de Datos de la Carrera de Estadística de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA). Profesor universitario con más de 16 años de experiencia en estadística, econometría, ciencia de datos e investigación operativa en la UCB y UMSA. Director de BAYESMATH - Academia de Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial. Ex-Jefe de la Unidad de Análisis Productivo del Ministerio de Desarrollo Productivo y Economía Plural de Bolivia, donde desarrolló el Sistema Integrado de Información Productiva (SIIP). Especialista en análisis multivariante, econometría bayesiana y machine learning aplicado.

Resumen

La Descomposición en Valores Singulares (SVD) constituye una de las herramientas más versátiles del álgebra lineal con aplicaciones transversales en múltiples disciplinas. El objetivo es presentar una sistematización didáctica de las aplicaciones de la SVD en inteligencia artificial, aprendizaje estadístico y análisis económico. Metodología: Se desarrolla un marco teórico unificado partiendo del teorema de factorización $A = USV^T$, analizando la interpretación geométrica como secuencia de transformaciones y el teorema de Eckart-Young-Mirsky para aproximaciones de bajo rango, con implementaciones en Python. Resultados: Se demuestra la aplicación de SVD en: reducción dimensional (PCA), sistemas de recomendación, procesamiento de lenguaje natural (LSA), compresión de imágenes, regularización Ridge, Índice de Complejidad Económica (ECI), matrices input-output y Singular

Spectrum Analysis (SSA). Conclusión: La SVD representa una herramienta fundamental que conecta el álgebra lineal con aplicaciones modernas en ciencia de datos y economía cuantitativa, permitiendo abordar problemas de alta dimensionalidad y extracción de estructura latente.

Palabras clave

Descomposición en Valores Singulares; Análisis de Componentes Principales; Aprendizaje Estadístico; Complejidad Económica; Reducción Dimensional.

1. Introducción

La Descomposición en Valores Singulares (SVD) es considerada uno de los resultados más importantes del álgebra lineal computacional moderna. Establecida formalmente por Beltrami (1873) y Jordan (1874), la SVD permite factorizar cualquier matriz real o compleja en el producto de tres matrices con propiedades especiales, revelando la estructura fundamental de los datos. En el contexto actual de ciencia de datos e inteligencia artificial, la SVD ha adquirido relevancia central debido a su capacidad para: (1) reducir la dimensionalidad preservando la máxima varianza, (2) identificar patrones latentes en datos de alta dimensión, (3) proporcionar aproximaciones de bajo rango óptimas, y (4) estabilizar numéricamente problemas mal condicionados. El objetivo principal de este trabajo es sistematizar las aplicaciones de la SVD en tres dominios fundamentales: inteligencia artificial (sistemas de recomendación, procesamiento de lenguaje natural, compresión de imágenes), aprendizaje estadístico (PCA, regularización, regresión de componentes principales), y economía (complejidad económica, análisis input-output, series temporales). La relevancia de esta sistematización radica en la necesidad de presentar un marco unificado que conecte la teoría matemática con aplicaciones prácticas, facilitando la comprensión y aplicación de esta técnica fundamental en contextos interdisciplinarios.

2. Metodología / Desarrollo Teórico

El marco teórico se fundamenta en el Teorema de Descomposición en Valores Singulares: toda matriz A perteneciente a R^{mxn} puede factorizarse como $A = USV^T$, donde U perteneciente a

R^{mxm} y V perteneciente a R^{nxn} son matrices ortogonales (vectores singulares izquierdos y derechos, respectivamente), y S perteneciente a R^{mxn} es una matriz diagonal con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$. La interpretación geométrica de la SVD revela que cualquier transformación lineal puede descomponerse en tres operaciones consecutivas: una rotación (V^T), un escalado a lo largo de los ejes principales (S), y una rotación final (U). Esta perspectiva geométrica es fundamental para comprender las aplicaciones en reducción dimensional. El Teorema de Eckart-Young-Mirsky establece que la mejor aproximación de rango k a una matriz A, medida en norma de Frobenius o espectral, está dada por la suma de los primeros k productos de valores y vectores singulares. Este resultado proporciona la base teórica para la reducción dimensional y compresión de datos. Se utilizan implementaciones computacionales en Python con las bibliotecas NumPy (numpy.linalg.svd), SciPy (scipy.sparse.linalg.svds para matrices dispersas), y scikit-learn (TruncatedSVD para aproximaciones eficientes en big data).

3. Resultados y Discusión

Los resultados se organizan en tres áreas de aplicación:

3.1 Inteligencia Artificial

Sistemas de Recomendación: La factorización matricial mediante SVD permite descomponer la matriz de interacciones usuario-item en factores latentes, capturando preferencias ocultas. Este enfoque fue fundamental en la solución ganadora del Netflix Prize (Koren et al., 2009). Procesamiento de Lenguaje Natural: El Latent Semantic Analysis (LSA) aplica SVD truncada a la matriz término-documento TF-IDF, proyectando documentos y términos a un espacio semántico de menor dimensión que captura relaciones de sinonimia y polisemia. Compresión de Imágenes: Una imagen puede representarse como matriz y aproximarse mediante SVD truncada. Con k=50 componentes, una imagen de 512x512 píxeles puede comprimirse con ratio 5:1 preservando más del 90% de la información visual.

3.2 Aprendizaje Estadístico

Análisis de Componentes Principales (PCA): Existe una conexión directa entre SVD y PCA: los vectores singulares derechos V son los componentes principales, y los valores singulares al cuadrado (divididos por n-1) son las varianzas de cada componente. Regularización Ridge: La solución Ridge puede expresarse en términos de SVD, donde el factor de shrinkage penaliza

más los componentes con valores singulares pequeños, proporcionando una interpretación geométrica de la regularización.

3.3 Economía

Índice de Complejidad Económica (ECI): Hidalgo y Hausmann (2009) demostraron que el ECI corresponde al segundo vector singular de la matriz de ventaja comparativa revelada normalizada, conectando la complejidad económica con la estructura espectral de los datos de comercio internacional. Singular Spectrum Analysis (SSA): Esta técnica aplica SVD a la matriz de trayectorias de una serie temporal, permitiendo descomponer tendencia, ciclo y componente estacional de manera no paramétrica.

4. Conclusiones

La Descomposición en Valores Singulares representa una herramienta matemática fundamental que trasciende las fronteras disciplinarias, conectando el álgebra lineal pura con aplicaciones modernas en ciencia de datos, machine learning y economía cuantitativa. Los principales hallazgos de esta sistematización incluyen: (1) la SVD proporciona un marco unificado para entender técnicas aparentemente diversas como PCA, LSA, y factorización matricial; (2) el teorema de Eckart-Young-Mirsky fundamenta teóricamente la reducción dimensional óptima; (3) las conexiones entre SVD y complejidad económica revelan aplicaciones no evidentes en análisis de desarrollo económico; (4) los algoritmos de SVD aleatorizada permiten escalar estas técnicas a conjuntos de datos masivos. Se recomienda profundizar en la aplicación de SVD al análisis de datos económicos bolivianos, particularmente en el cálculo del índice de complejidad económica a nivel subnacional y el análisis de matrices input-output sectoriales para identificar clúster productivos estratégicos.

Referencias bibliográficas

- Eckart, C., & Young, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. Psychometrika, 1(3), 211-218.
- Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). Matrix Computations (4th ed.). Johns Hopkins University Press.

- Halko, N., Martinsson, P. G., & Tropp, J. A. (2011). Finding structure with randomness: Probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions. SIAM Review, 53(2), 217-288.
- Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). The Elements of Statistical Learning (2nd ed.). Springer.
- Hidalgo, C. A., & Hausmann, R. (2009). The building blocks of economic complexity. PNAS, 106(26), 10570-10575.
- Koren, Y., Bell, R., & Volinsky, C. (2009). Matrix factorization techniques for recommender systems. Computer, 42(8), 30-37.
- Strang, G. (2019). Linear Algebra and Learning from Data. Wellesley-Cambridge Press.

SERIES DE POTENCIAS ASOCIADAS CON RECÍPROCOS DE COEFICIENTES BINOMIALES CENTRALES GENERALIZADOS

(Plenaria)

RIMER MAURICIO ZURITA ORELLANA
mauriciozurita.o@umss.edu

Semblanza:

Rimer Zurita Orellana es un matemático boliviano con formación doctoral en Matemáticas por la Universidad de Ginebra Suiza (2013), donde desarrolló una sólida base en investigación matemática, particularmente en teoría de números y áreas afines, con producción científica publicada en revistas especializadas internacionales.

A lo largo de su trayectoria académica, ha ejercido la docencia tanto en programas de pregrado como de posgrado en diversas universidades de Bolivia, entre ellas la Universidad Mayor de San Simón, la Universidad Mayor de San Andrés, la Universidad Autónoma Gabriel René Moreno, la Universidad Católica Boliviana y la Universidad Privada Boliviana, contribuyendo de manera significativa a la formación de profesionales en el área de las matemáticas o ingeniería.

Actualmente se desempeña como docente titular en la Universidad Mayor de San Simón, donde también ha asumido roles de liderazgo académico. Entre 2022 y 2024 ejerció como director de la Carrera de Matemáticas, impulsando procesos de fortalecimiento institucional y académico dentro de la formación matemática superior.

Resumen

Exploramos series de potencias que representan recíprocos de coeficientes binomiales centrales multiplicados por términos lineales de diferencias o sus cuadrados, incorporando funciones polinómicas, la función arcoseno y raíces cuadradas. Los resultados de este estudio generalizan aquellos establecidos por Sprugnoli.

Palabras clave:

Recíprocos coeficientes binomiales centrales, funciones generadoras, funciones elementales.

Introducción

Los coeficientes binomiales centrales se definen para $n \in N$ como

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\ n!}.$$

Poseen muchas propiedades combinatorias y contribuyen a la resolución de numerosos problemas de conteo. Por ejemplo, la identidad de Vandermonde, $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, muestra que el n-ésimo coeficiente binomial central es igual a la suma de los cuadrados de los coeficientes de la n-ésima fila del triángulo de Pascal. Estos coeficientes también están relacionados con los números de Catalan, definidos por

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1},$$

los cuales representan, por ejemplo, el número de maneras de dividir un $(n+2)$-gono en triángulos formados al conectar los vértices mediante segmentos que no se intersectan. Existen muchas otras interpretaciones para los números de Catalan; véase por ejemplo.

En [4], se demuestra que la función generadora asociada con los recíprocos de los números de Catalan está dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{C_k} = \frac{2(x+8)}{(4-x)^2} + \frac{24\sqrt{x}}{(4-x)^{5/2}} arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right).$$

Esta serie también aparece en [2,12,14,20].

Existen muchos resultados relacionados con sumas finitas o infinitas que involucran coeficientes binomiales centrales (o sus recíprocos), números de Catalan, números de Fibonacci, números de Lucas, números armónicos y otras sucesiones especiales que surgen naturalmente. Boyadzhiev , por ejemplo, estudió series de las formas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k H_k x^k}{\binom{2k}{k}} \quad and \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k} x^k}{k+m+1},$$

donde H_k representa el k-ésimo número armónico, expresándolas en términos de funciones elementales.

En 2006, Sprugnoli [17] demostró, entre otros resultados, que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-1)\binom{2k}{k}} = 2(2x-1)\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 2x,$$

$$and \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-1)^2\binom{2k}{k}}$$

$$= 4(1-x)\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 4x(arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}})^2 - 4x.$$

Ambas igualdades son válidas para $|x| < 1$. Estos resultados proporcionaron la principal motivación inicial para los desarrollos presentados en este trabajo. De hecho, en el artículo mencionado, Sprugnoli no especifica los dominios de validez de varios de los resultados que presenta acerca de las series de potencias que estudia. Una determinación más rigurosa de estos dominios puede obtenerse diferenciando e integrando el resultado del Teorema 1 de [1], artículo en el cual también se enfatizan y discuten cuestiones adicionales relacionadas con el trabajo de Sprugnoli.

En 2018, Chu y Esposito [8,9] obtuvieron evaluaciones exactas, en términos de funciones elementales, para series de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda_m(k)}{\binom{2mk+2\gamma}{mk+\gamma}}(2x)^{2mk},$$

donde $\Lambda_m(k)$ denota un polinomio de grado m en k expresado en términos de factoriales descendentes.

En este trabajo, obtenemos en los Teoremas 1 y 2 resultados generales para sumas de la forma

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}} \quad and \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)^2\binom{2mk}{mk}},$$

con $m, n \in N$ fijos. Estas series, que generalizan los resultados de Sprugnoli, se expresan mediante funciones polinómicas, funciones trigonométricas inversas y radicales, permitiendo

una manipulación más familiar de las expresiones. La idea principal consiste en aplicar una multisección a la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k x^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{\sqrt{x}arcsin(\sqrt{x})}{(1-x)^{3/2}} + \frac{1}{1-x}$$

establecida por Lehmer [15]. Posteriormente, integrando dichas expresiones, se obtienen resultados exactos en términos de funciones elementales para ciertas integrales que aparecen en el proceso. Además, se realizan manipulaciones apropiadas para simplificar sumatorias, obteniéndose así los principales resultados del presente trabajo. Como caso particular, podemos calcular sumas infinitas de la forma

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-n)\binom{2mk}{mk}} \quad and \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k-n)^2\binom{2mk}{mk}},$$

o sus respectivas series alternantes.

El presente trabajo complementa y extiende el estudio previo del autor [21], en el cual se obtuvieron resultados generales, en términos de funciones elementales, para series de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k+n)\binom{2mk}{mk}} \quad and \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2\binom{2mk}{mk}}.$$

Definiciones

Definición 1. Sea $n \geq 1$ un entero. Definimos los polinomios

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} s_k x^k$$

de grado n, tales que sus coeficientes satisfacen la siguiente relación recursiva

$$s_0 := \frac{1}{1/2-n};\ s_k := \left(\frac{k-1-n}{k-n+1/2}\right) \cdot s_{k-1}, \quad para\ \ k = 1,2,\dots,n.$$

Remarca 1. Se tiene

$$s_n = \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}},$$

lo cual implica

$$s_{n-1} = -\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}.$$

En efecto, usando la Definición 1, obtenemos

$$s_n = \frac{1}{1/2-n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1-n}{k-n+1/2}\right) = \frac{2^{2n+1}n!^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}}.$$

La Tabla 1 muestra los primeros polinomios $S_n(x)$.

Tabla 1: Los primeros seis polinomios $S_n(x)$.

n	$S_n(x)$
1	$-2+4x$
2	$-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}x^2$
3	$-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x-\frac{16}{5}x^2+\frac{32}{5}x^3$
4	$-\frac{2}{7}-\frac{16}{35}x-\frac{32}{35}x^2-\frac{128}{35}x^3+\frac{256}{35}x^4$
5	$-\frac{2}{9}-\frac{20}{63}x-\frac{32}{63}x^2-\frac{64}{63}x^3-\frac{256}{63}x^4+\frac{512}{63}x^5$
6	$-\frac{2}{11}-\frac{8}{33}x-\frac{80}{231}x^2-\frac{128}{231}x^3-\frac{256}{231}x^4-\frac{1024}{231}x^5+\frac{2048}{231}x^6$

Definicion 2. Sea $n \geq 2$ un entero. Definimos la constante $c_n := \frac{s_n}{2} - 1$. También definimos los polinomios

$$T_{n-2}(x) := \sum_{k=0}^{n-2} t_k x^k$$

de grado $n-2$, tales que sus coeficientes satisfacen la relación recursiva

$$t_{n-2} := -\frac{s_{n-1}}{2} - c_n; \quad t_{k-1} := \frac{(k+1-n)t_k + s_k/2}{k-n}, \quad para\ k = n-2, n-3, \dots, 1.$$

Para $n = 1$, convenimos que $c_1 := 1$ y $T_{-1}(x) := 0$.

La Tabla 2 muestra los primeros valores de c_n y los primeros polinomios $T_{n-2}(x)$.

Tabla 2: Las primeras seis constantes c_n y los polinomios $T_{n-2}(x)$.

n	c_n	$T_{n-2}(x)$
1	1	0
2	$5/3$	$-1/3$
3	$11/5$	$-1/10-3/5x$
4	$93/35$	$-\frac{1}{21}-\frac{13}{70}x-\frac{29}{35}x^2$
5	$193/63$	$-\frac{1}{36}-\frac{17}{189}x-\frac{11}{42}x^2-\frac{65}{63}x^3$
6	$793/231$	$-\frac{1}{55}-\frac{7}{132}x-\frac{89}{693}x^2-\frac{51}{154}x^3-\frac{281}{231}x^4$

Remarca 2. Por la Observación 1, para $n \in N$ se tiene

$$c_n = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} - 1.$$

Definición 3. Sea $n \geq 1$ un entero. Definimos los polinomios

$$M_{n-1}(x) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k x^k$$

de grado $n-1$, tales que sus coeficientes satisfacen la relación recursiva

$$m_0 := \frac{2}{2n-1};\ m_k := \frac{2(k-n)}{2k-2n+1} \cdot m_{k-1}, \quad para\ \ k = 1,2,\dots,n-1.$$

La Tabla 3 muestra los primeros polinomios $M_{n-1}(x)$.

Tabla 3: Los primeros seis polinomios $M_{n-1}(x)$.

n	$M_{n-1}(x)$
1	2
2	$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}x$
3	$\frac{2}{5}+\frac{8}{15}x+\frac{16}{15}x^2$
4	$\frac{2}{7}+\frac{12}{35}x+\frac{16}{35}x^2+\frac{32}{35}x^3$
5	$\frac{2}{9}+\frac{16}{63}x+\frac{32}{105}x^2+\frac{128}{315}x^3+\frac{256}{315}x^4$

n	$M_{n-1}(x)$
6	$\frac{2}{11}+\frac{20}{99}x+\frac{160}{693}x^2+\frac{64}{231}x^3+\frac{256}{693}x^4+\frac{512}{693}x^5$

Definicion 4. Sea $n \geq 2$ un entero. Definimos la constante $d_n := \frac{m_{n-1}}{2}$. También definimos los polinomios

$$N_{n-2}(x) := \sum_{k=0}^{n-2} n_k x^k$$

de grado $n-2$ mediante

$$N_{n-2}(x) := \frac{x^{n-1}}{2} \cdot \int \left(\frac{M_{n-1}(x) - m_{n-1}x^{n-1}}{x^n} \right) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{m_k x^k}{-n+k+1}.$$

Para $n = 1$, convenimos que $d_1 := 1$ y $N_{-1}(x) := 0$.

La Tabla 4 muestra las primeras constantes d_n y los primeros polinomios $N_{n-2}(x)$.

Tabla 4: Las primeras seis constantes d_n y los polinomios $N_{n-2}(x)$.

n	d_n	$N_{n-2}(x)$
1	1	0
2	2/3	$-1/3$
3	8/15	$-(8x+3)/30$
4	16/35	$-(24x^2+9x+5)/105$
5	128/315	$-(768x^3+288x^2+160x+105)/3780$
6	256/693	$-(3840x^4+1440x^3+800x^2+525x+378)/20790$

Remarca 3. Sea $n \in N$. Podemos demostrar que

$$d_n = \frac{4^n}{2n\binom{2n}{n}}.$$

Resultados Auxiliares

Lema 1. *Para $n \geq 1$, se tiene*

$$\int x^{-n-\frac{1}{2}} \frac{arcsinarcsin\left(\sqrt{x}\right)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\, dx = log(x-1) + c_n log(x) + \frac{T_{n-2}(x)}{x^{n-1}} + \frac{arcsinarcsin\left(\sqrt{x}\right)}{x^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}} S_n(x), \quad (1)$$

donde la constante c_n y los polinomios $T_{n-2}(x)$ y $S_n(x)$ son los definidos en las Definiciones 1 y 2.

Prueba. Para $n = 1$, la demostración es inmediata. Para $n \geq 2$, debemos demostrar que la derivada del lado derecho de la Ecuación (1) es igual al integrando del lado izquierdo.

Por un lado, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{T_{n-2}(x)}{x^{n-1}}\right) = \sum_{k=0}^{n-2} (-n+k+1)t_k x^{-n+k}.$$

Por otro lado, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{arcsin(\sqrt{x})S_n(x)}{x^{n-1/2}\sqrt{1-x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{arcsin(\sqrt{x})}{x^{n-1/2}\sqrt{1-x}}\right) S_n(x) + \frac{arcsin(\sqrt{x})}{x^{n-1/2}\sqrt{1-x}} \frac{d}{dx}(S_n(x))$$

$$= \frac{S_n(x)}{2x^n(1-x)} + \frac{arcsin(\sqrt{x})}{x^{n+1/2}(1-x)^{3/2}} \cdot ((nx-n+1/2)S_n(x) + x(1-x)S_n'(x)).$$

Demostremos que,

$$x(1-x)S_n'(x) + \left(nx - n + \frac{1}{2}\right) S_n(x) = 1. \quad (2)$$

En efecto, la Ecuación (2) se cumple si y solo si

$$x(1-x)(s_1 + 2s_2x + 3s_3x^2 + \cdots + ns_nx^{n-1}) + (nx-n+1/2)(s0 + s_1x + \cdots + s_nx^n) = 1,$$

si y solo si

$$s_0(-n+1/2) = 1, \quad ks_k - (k-1)s_{k-1} + (-n+1/2)s_k + ns_{k-1} = 0,$$

para todo $1 \leq k \leq n$, y $-ns_n + ns_n = 0$, si y solo si

$$s_0 = \frac{1}{1/2-n} \quad y \quad s_k = \frac{k-1-n}{k-n+1/2} \cdot s_{k-1}.$$

Estas dos últimas igualdades se cumplen por la definición de los coeficientes s_k.

Haciendo $x = 1$ en la Ecuación (2), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n} s_k = 2. \quad (3)$$

La demostración queda completa si logramos probar que

$$\frac{1}{x-1} + \frac{c_n}{x} + \sum_{k=0}^{n-2} (-n+k+1)t_k x^{-n+k} + \frac{S_n(x)}{2x^n(1-x)} = 0.$$

En efecto, comparando coeficientes, esta última igualdad se cumple si y solo si

$$x^n + c_n x^{n-1}(x-1) + (x-1)\sum_{k=0}^{n-2} \quad (-n+k+1)t_k x^k - \frac{S_n(x)}{2} = 0,$$

si y solo si

$$1 + c_n - \frac{s_n}{2} = 0, \quad -c_n - t_{n-2} - \frac{s_{n-1}}{2} = 0, \quad (-n+k)t_{k-1} - (-n+k+1)t_k - \frac{s_k}{2} = 0,$$

para todo $1 \leq k \leq n-2$, y

$$(n-1)t_0 - \frac{s_0}{2} = 0$$

si y solo si

$$c_n = \frac{s_n}{2} - 1, \quad t_{n-2} = -\frac{s_{n-1}}{2} - c_n, \quad t_{k-1} = \frac{(-n+k+1)t_k + \frac{s_k}{2}}{k-n}, \qquad (4)$$

para todo $1 \leq k \leq n-2$, y

$$t_0 = \frac{s_0/2}{n-1}. \qquad (5)$$

Las ecuaciones en (4) se cumplen por definición de los coeficientes c_n y t_k. Demostremos que (5) también se cumple. En efecto, usando la relación recursiva que define t_k, tenemos

$$\frac{s_0/2}{n-1} = t_0 = \frac{(2-n)t_1 + s_1/2}{1-n},$$

si y solo si

$$\frac{(s_0+s_1)/2}{n-2} = t_1 = \frac{(3-n)t_2 + s_2/2}{2-n},$$

si y solo si

$$\frac{(s_0+s_1+s_2)/2}{n-3} = t_2 = \frac{(4-n)t_3 + s_3/2}{3-n},$$

si y solo si ...

$$t_{n-2} = \frac{(s_0+s_1+\cdots+s_{n-2})/2}{n-(n-2+1)},$$

si y solo si

$$\frac{(s_0+s_1+\cdots+s_{n-2})}{2} = -\frac{s_{n-1}}{2} - c_n,$$

si y solo si

$$c_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \quad s_k}{2}.$$

Por la Ecuación (3), esta última igualdad se cumple si y solo si

$$c_n = -\frac{(2 - s_n)}{2} = \frac{s_n}{2} - 1,$$

lo cual se cumple por definición de c_n. □

Lema 2. *Para $n \geq 1$, se tiene*

$$\int x^{-n-\frac{1}{2}} \frac{arcsinarcsin\,(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\, dx = d_n log(x) - \frac{arcsinarcsin\,(\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}}{x^n} M_{n-1}(x) + \frac{N_{n-2}(x)}{x^{n-1}}, \quad (6)$$

donde la constante d_n y los polinomios $M_{n-1}(x)$ y $N_{n-2}(x)$ son los definidos en las Definiciones 3 y 4.

Remarca 4. Para $n = 0$,

$$\int x^{-1/2} \frac{arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\, dx = (arcsin(\sqrt{x}))^2.$$

Proof. Para $n = 1$, la demostración es inmediata. Para $n \geq 2$, debemos demostrar que la derivada del lado derecho de la Ecuación (6) es igual al integrando del lado izquierdo, es decir,

$$\frac{d_n}{x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{arcsin(\sqrt{x})(2x-1)}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) M_{n-1}(x)x^{-n} - arcsin(\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}x^{-n}M'_{n-1}(x)$$
$$+ narcsin(\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}x^{-n-1}M_{n-1}(x) + \frac{N'_{n-2}(x)}{x^{n-1}} + (-n+1)\frac{N_{n-2}(x)}{x^n}$$
$$= x^{-n-1/2}\frac{arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}.$$

Para ello, demostremos que

$$\frac{(2x-1)}{2\sqrt{x(1-x)}} M_{n-1}(x)x^{-n} + n\sqrt{x(1-x)}x^{-n-1}M_{n-1}(x) - \sqrt{x(1-x)}x^{-n}M'_{n-1}(x) = \frac{x^{-n-1/2}}{\sqrt{1-x}} \quad (7)$$

y

$$\frac{d_n}{x} - \frac{1}{2}M_{n-1}(x)x^{-n} + \frac{N'_{n-2}(x)}{x^{n-1}} + (-n+1)\frac{N_{n-2}(x)}{x^n} = 0. \quad (8)$$

Consideremos primero la Ecuación (8). Debemos demostrar que

$$\big((2-2n)x + (2n-1)\big)M_{n-1}(x) + (2x^2 - 2x)M'_{n-1}(x) = 2. \quad (9)$$

Comparando coeficientes, vemos que la Ecuación [seis] se cumple si y solo si

$$2m_{n-1} - 2nm_{n-1} + 2m_{n-1}(n-1)$$
$$= 0, (2-2n)m_{k-1} + (2n-1)m_k + 2(k-1)m_{k-1} - 2km_k = 0, \quad for\ all\ 1 \leq k \leq n, (2n-1)m_0 = 2,$$

si y solo si

$$m_k = \left(\frac{-2n+2k}{2k-2n+1}\right) m_{k-1}, \quad para\ todo\ 1 \leq k \leq n, m_0 = \frac{2}{2n-1},$$

lo cual se cumple por definición de los coeficientes de $M_{n-1}(x)$. Sustituyendo $x = 1$ en la Ecuación [seis], obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k = 2. \qquad (10)$$

Consideremos ahora la Ecuación (7), la cual es equivalente a

$$N'_{n-2}(x) = \frac{n-1}{x} N_{n-2}(x) + \left(\frac{M_{n-1}(x)}{2x} - d_n x^{n-2}\right).$$

Esto representa una ecuación diferencial de primer orden, cuya solución está dada por

$$N_{n-2}(x) = x^{n-1} \int \left(\frac{M_{n-1}(x)}{2x^n} - \frac{d_n}{x}\right) dx.$$

Por la Definición 4 sabemos que $d_n = \frac{m_{n-1}}{2}$. Entonces

$$N_{n-2}(x) = x^{n-1} \int \left(\frac{M_{n-1}(x) - m_{n-1}x^{n-1}}{2x^n}\right) dx,$$

lo cual se cumple por la Definición 4. □

Lema 3. *Para todo entero fijo $m \geq 1$ y para todo $|x| < 4^{m-1}$, se tiene*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k x^k}{\binom{2mk}{mk}} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{4\sqrt{y}\, arcsin(\sqrt{y}/2)}{(4-y)^{3/2}} + \frac{4}{4-y}\right), \qquad (11)$$

donde $y = w^j (4x)^{1/m}$ depende de j, y $w = e^{2\pi i/m}$ es la raíz m-ésima de la unidad.

Prueba. Sabemos por Lehmer que, para todo $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k x^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{\sqrt{x}\, arcsin(\sqrt{x})}{(1-x)^{3/2}} + \frac{1}{1-x}.$$

Esto implica que, para $|x| < 4$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{4\sqrt{x}\, arcsin(\sqrt{x}/2)}{(4-x)^{3/2}} + \frac{4}{4-x}.$$

Entonces tenemos, para $|x| < 4^{m-1}$,

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{4\sqrt{y}arcsin(\sqrt{y}/2)}{(4-y)^{3/2}}+\frac{4}{4-y}\right)=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w^{kj}(4x)^{k/m}}{\binom{2k}{k}}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4x)^{k/m}}{\binom{2k}{k}}\sum_{j=0}^{m}w^{kj}.$$

Finalmente, como

$$\sum_{j=0}^{m-1}w^{kj}=\{0\ if\ k\nmid m, m\ if\ k|m,$$

obtenemos que

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4x)^{k/m}}{\binom{2k}{k}}\sum_{j=0}^{m-1}w^{kj}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(4x)^{l}}{\binom{2ml}{ml}},$$

lo que demuestra el resultado.

Resultados Principales

Teorema 1. *Para cualesquiera enteros fijos $n \geq 1, m \geq 1$, y para $|x| < 4^{m-1}$, se tiene*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}}=4^{1/m-1}x^{1/m}\sum_{j=0}^{m-1}T_{mn-2}(z)w^j+$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{\frac{z}{1-z}}arcsin(\sqrt{z})S_{mn}(z)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4^k x^k}{(k-n)}\left(\frac{1}{4^{km}}-\frac{1}{\binom{2mk}{mk}}\right)-$$

$$\left(\frac{4^{n(1-m)}m}{2}\sum_{k=1}^{mn}\frac{4^k}{k\binom{2k}{k}}s_{mn-k}\right)x^n,$$

donde $z=4^{1/m-1}w^j x^{1/m}$ depende de j, $w=e^{2\pi i/m}$ es la raíz m-ésima de la unidad, los polinomios T_{mn-2} y S_{mn} de grados $mn-2$ y mn, respectivamente, son los definidos en las Definiciones 1 y 2, y los coeficientes s_{mn-k} corresponden a los del polinomio S_{mn}.

Prueba. Comenzamos considerando la Ecuación (11), la cual multiplicamos por x^{n-1} y luego integramos respecto de x, lo que conduce a

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}}$$

$$= \frac{x^n}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \int x^{-n-1}\left(\frac{4\sqrt{y}arcsin(\sqrt{y}/2)}{(4-y)^{3/2}}\right)dx$$

$$+ \frac{x^n}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \int \frac{4}{x^{n+1}(4-y)}\,dx \qquad + Cx^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}}$$

$$- \frac{4^n x^n\, log\, log\,(x)}{\binom{2mn}{mn}}, \qquad (12)$$

donde C es una constante por determinar.

Al tomar $y = w^j(4x)^{1/m} = 4z$, lo cual implica que $x = 4^{m-1}z^m$, tenemos por un lado que la primera integral del miembro derecho

$$I_1 = 4^{-n(m-1)}m\int z^{-mn-1/2}\frac{arcsin(\sqrt{z})}{(1-z)^{3/2}}\,dz.$$

Entonces el Lema 1 conduce a

$$I_1 = 4^{-n(m-1)}m\left(log(z-1) + c_{mn}log(z) + \frac{T_{mn-2}(z)}{z^{mn-1}} + \frac{arcsin(\sqrt{z})}{z^{mn-1/2}\sqrt{1-z}}S_{mn}(z)\right).$$

Por otro lado, mediante el mismo cambio de variable anterior, la segunda integral del miembro derecho

$$I_2 = m\int \frac{4^{m-1}z^{m-1}}{4^{(m-1)(n+1)}(1-z)z^{m(n+1)}}\,dz = \frac{m}{4^{(m-1)n}}\int \frac{1}{z^{mn+1}(1-z)}\,dz.$$

Descomponiendo en fracciones parciales, obtenemos

$$I_2 = \frac{m}{4^{(m-1)n}}\int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{z^{mn+1}}\right)dz$$

$$= \frac{m}{4^{(m-1)n}}\cdot\left(log(z) - log(z-1) - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} - \cdots - \frac{1}{mnz^{mn}}\right).$$

Continuando los cálculos de la Ecuación (12), $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}} = x^n 4^{-n(m-1)}$.

$\sum_{j=0}^{m-1} \left(log(z-1) + c_{mn}log(z) + \frac{T_{mn-2}(z)}{z^{mn-1}} + \frac{arcsin(\sqrt{z})}{z^{mn-1/2}\sqrt{1-z}}S_{mn}(z)\right) + \frac{x^n}{4^{(m-1)n}}\cdot$

$\sum_{j=0}^{m-1} \left(log(z) - log(z-1) - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} - \cdots - \frac{1}{mnz^{mn}}\right) + Cx^n -$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}} - \frac{4^n x^n log(x)}{\binom{2mn}{mn}}$. Entonces, por la Remarca 2, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}} =$

$x^n 4^{-(m-1)n} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{4^{mn}}{\binom{2mn}{mn}} log(z)\right) - \frac{4^n x^n log(x)}{\binom{2mn}{mn}} - x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{kz^k} +$

$x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{T_{mn-2}(z)}{z^{mn-1}} + \frac{arcsin(\sqrt{z})}{z^{mn-1/2}\sqrt{1-z}} S_{mn}(z)\right) + Cx^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}}$.

Tomando $z = 4^{1/m-1} w^j x^{1/m}$ y agrupando y simplificando el primer y segundo término del lado derecho de la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{x^n 4^n}{\binom{2mn}{mn}} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\left(\frac{1}{m} - 1\right) log(4) + \frac{2\pi i j}{m}\right) = \frac{4^n x^n}{\binom{2mn}{mn}} ((1-m) log(4) + \pi i (m-1)).$$

Por otro lado,

$$x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{kz^k} = x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{s=1}^{mn} \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(4^{1/m-1} x^{1/m})^s w^{sj}}$$

$$= x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{s=1}^{mn} \left(\frac{1}{4^{(1/m-1)s} x^{s/m} s} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} w^{-sj}\right)$$

$$= x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k 4^{(1-m)k} x^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}}{k 4^{(k-n)(1-m)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{(n-k) 4^{k(m-1)}}.$$

Así, obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}}$$

$$= \frac{4^n x^n}{\binom{2mn}{mn}} ((1-m) log(4) + \pi i (m-1)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{(n-k) 4^{k(m-1)}}$$

$$+ 4^{1/m-1} x^{1/m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(T_{mn-2}(z) w^j + w^j \frac{arcsin(\sqrt{z})}{z} \sqrt{\frac{z}{1-z}} S_{mn}(z)\right)$$

$$+ Cx^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2mk}{mk}}. \qquad (13)$$

El tercer término del lado derecho es igual a

$$\left(4^{1/m-1}x^{1/m}\sum_{j=0}^{n-1} T_{mn-2}(z)w^j\right)+\sum_{j=0}^{m-1} arcsin(\sqrt{z})\sqrt{\frac{z}{1-z}}S_{mn}(z).$$

Comparando los coeficientes de x^n en ambos lados de la Ecuación (13), obtenemos

$$0 = C+\frac{4^n}{\binom{2mn}{mn}}((1-m)log(4)+\pi i(m-1)) + Coef_{x^n}\left(\sum_{j=0}^{m-1} arcsin(\sqrt{z})\sqrt{\frac{z}{1-z}}S_{mn}(z)\right).$$

Sabemos, por Melzak [16, p.108] y Lehmer [15], que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k z^k}{k\binom{2k}{k}} = \sqrt{\frac{z}{1-z}}arcsin(\sqrt{z}). \qquad (14)$$

Por lo tanto,

$$C = -\frac{4^n}{\binom{2mn}{mn}}((1-m)log(4)+\pi i(m-1))-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{mn-1}\frac{4^{mn-k}s_k(4^{1/m-1}w^j)^{mn}}{(mn-k)\binom{2(mn-k)}{mn-k}}$$

$$= -\frac{4^n}{\binom{2mn}{mn}}((1-m)log(4)+\pi i(m-1)) - \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{mn-1}\frac{4^{n-k}s_k}{(mn-k)\binom{2(mn-k)}{mn-k}}$$

$$= -\frac{4^n}{\binom{2mn}{mn}}((1-m)log(4)+\pi i(m-1)) - \frac{m4^{n(1-m)}}{2}\sum_{k=1}^{mn}\frac{4^k s_{mn-k}}{k\binom{2k}{k}}.$$

Sustituyendo en la Ecuación (13), obtenemos el resultado deseado. □

Corolario 1. *Para $n \in N$ fijo y $|x| < 4$, se tiene* $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{4^k x^k}{(k-n)\binom{2k}{k}} = xT_{n-2}(x) + \sqrt{\frac{x}{1-x}}arcsin(\sqrt{x})S_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k-n}\left(1-\frac{4^k}{\binom{2k}{k}}\right)x^k - \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k\binom{2k}{k}}s_{n-k}\right)x^n,$

donde los polinomios $T_{n-2}(x)$ y $S_n(x)$ son como en las Definiciones 1 y 2, y s_{n-k} es el coeficiente $(n-k)$-ésimo de S_n.

Para facilitar la discusión, de ahora en adelante denotaremos por $t_j^{(i)}$ el coeficiente de x^j en el polinomio $T_i(x)$, tal como se define en la Definición 2. De manera similar, denotaremos por $s_j^{(i)}, m_j^{(i)}, n_j^{(i)}$ los coeficientes de x^j en los polinomios $S_i(x), M_i(x), N_i(x)$, definidos en las Definiciones 1, 3 y 4, respectivamente.

Teorema 2. *Para cualesquiera enteros fijos $m \geq 1, n \geq 1$ y para $|x| < 4^{m-1}$, se tiene*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)^2\binom{2mk}{mk}} = \frac{m2^{2n+1}x^n}{\binom{2mn}{mn}} \sum_{j=0}^{m-1} (arcsin(\sqrt{z}))^2 + \sum_{k=1}^{n-1} r_k x^k + q x^n -$$

$$4^{-n(m-1)} m x^n \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{arcsin(\sqrt{z})\sqrt{z(1-z)}}{z^{mn}} \cdot \sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} M_{mn-k-1}(z) z^k \right)$$

donde $z = 4^{1/m-1} w^j x^{1/m}$ depende de j, $w = e^{2\pi i/m}$ es la raíz m-ésima de la unidad, el polinomio $M_{mn-k-1}(z)$ es como en la Definición 3, y $r_k := m4^{k(1-m)} \left(\frac{t_{mk-1}^{(mn-2)}}{(k-n)} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{mk-1} \frac{s_l^{(mn)} m_{mk-l-1}^{(mn-l-1)}}{k-n} \right) + \frac{4^k}{(k-n)^2} \left(\frac{1}{4^{km}} - \frac{1}{\binom{2mk}{mk}} \right)$ *y* $q := m^{24^{-n(m-1)}} \cdot \left(-\frac{2^{2mn+1}}{\binom{2mn}{mn}} + \sum_{l=0}^{mn-2} s_l^{(mn)} \left(\frac{4^{mn-l}}{(mn-l)\binom{2(mn-l)}{mn-l}} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{mn-l-1} \frac{4^p m_{mn-l-1-p}^{(mn-l-1)}}{p(2p+1)\binom{2p}{p}} \right) \right).$

Prueba. Multiplicando ambos lados de la ecuación del Teorema 1 por x^{-n-1}, integrando y luego multiplicando nuevamente por x^n, obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{4^k x^k}{(k-n)^2\binom{2mk}{mk}} = 4^{1/m-1} x^n \sum_{j=0}^{mn-1} w^j \int x^{1/m-n-1} T_{mn-2}(z)\, dx + x^n \sum_{j=0}^{m-1} \int x^{-n-1} \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, arcsin(\sqrt{z}) S_{mn}(z)\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4^k x^k}{(k-n)^2\binom{2mk}{mk}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{(k-n)^2\binom{2mk}{mk}} - \left(\frac{4^{n(1-m)} m}{2} \sum_{k=1}^{mn} \frac{4^k s_{mn-k}^{(mn)}}{k\binom{2k}{k}} \right) x^n log(x) + C x^n, \quad (15)$$

donde C es una constante por determinar.

Por un lado, en la Ecuación (15) tenemos

$$\begin{aligned}\int x^{1/m-n-1}T_{mn-2}(z)\,dx &= m4^{(m-1)(1/m-n)}w^{-j}\int z^{-mn}T_{mn-2}(z)\,dz\\ &= m4^{(m-1)(1/m-n)}w^{-j}\sum_{k=0}^{mn-2} t_k^{(mn-2)}\int z^{k-mn}\,dz\\ &= m4^{(m-1)(1/m-n)}\sum_{k=0}^{mn-2}\frac{t_k^{(mn-2)}z^{k-mn+1}}{k-mn+1}\\ &= x^{-n+1/m}\sum_{k=0}^{mn-2}\frac{4^{k(1/m-1)}t_k^{(mn-2)}w^{kj}x^{k/m}}{k-mn+1}.\end{aligned}$$

Entonces el primer término del lado derecho de (15) es igual a

$$\begin{aligned}&m4^{1/m-1}x^{1/m}\sum_{k=0}^{mn-2}\left(\frac{4^{k(1/m-1)}t_k^{(mn-2)}}{k-mn+1}x^{k/m}\sum_{j=0}^{m-1}w^{j(k+1)}\right)\\ &= m^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4^{k(1-m)}t_{mk-1}^{(mn-2)}x^k}{m(k-n)}.\end{aligned}$$

Por el Lema 2, y expandiendo el segundo término del lado derecho de la Ecuación (15),

$$x^n \sum_{j=0}^{m-1} \int x^{-n-1} \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, arcsin(\sqrt{z}) S_{mn}(z)\, dx$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \int \frac{z^{-mn-1/2} arcsin(\sqrt{z})}{\sqrt{1-z}} S_{mn}(z)\, dz$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)}$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} \int z^{-(mn-k)-1/2} \frac{arcsin(\sqrt{z})}{\sqrt{1-z}}\, dz \right.$$

$$\left. + s_{mn}^{(mn)} arcsin^2(\sqrt{z}) \right) \quad (16)$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} \left(d_{mn-k} log(z) \right.\right.$$

$$\left. - \frac{arcsin(\sqrt{z})\sqrt{z(1-z)}}{z^{mn-k}} M_{mn-k-1}(z) + \frac{N_{mn-k-2}(z)}{z^{mn-k-1}} \right)$$

$$\left. + s_{mn}^{(mn)} (arcsin(\sqrt{z}))^2 \right).$$

Expandamos ahora, uno por uno, los términos de esta última expresión. Por un lado, dado que $d_n = \frac{4^n}{2n\binom{2n}{n}}$ para todo $n \in N$, tenemos

$$mx^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} d_{mn-k} log(z)$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)} ((1-m) log(4) + log(x) + i\pi(m$$

$$- 1)) \left(\sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} d_{mn-k} \right)$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)} ((1-m) log(4) + log(x) + i\pi(m-1)) \cdot \sum_{k=1}^{mn} \frac{4^k s_{mn-k}^{(mn)}}{2k\binom{2k}{k}}.$$

Por otro lado, tenemos

$$mx^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} \frac{N_{mn-k-2}(z)}{z^{mn-k-1}}$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{mn-2} \left(\frac{s_k^{(mn)}}{z^{mn}} \sum_{l=0}^{mn-k-2} n_l^{(mn-k-l)} z^{l+k+1} \right) \right)$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{mn-2} \frac{z^{s+1}}{z^{mn}} \sum_{k=0}^{s} s_k^{(mn)} n_{s-k}^{(mn-k-2)} \right)$$

$$= mx^n 4^{-n(m-1)}$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{mn-2} \left(4^{(1/m-1)(s+1-mn)} x^{1/m(s+1-mn)} \left(\sum_{j=0}^{m-1} w^{j(s+1-mn)} \right) \sum_{k=0}^{s} s_k^{(mn)} n_{s-k}^{(mn-k-2)} \right)$$

$$= m^2 x^n 4^{-n(m-1)} \sum_{p=1}^{n-1} \left(4^{(1/m-1)(-mp)} x^{-p} \sum_{k=0}^{m(n-p)-1} s_k^{(mn)} n_{m(n-p)-k-1}^{(mn-k-2)} \right)$$

$$= m^2 4^{-n(m-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(4^{k(1-m)} \sum_{l=0}^{mk-1} s_l^{(mn)} n_{mk-l-1}^{(mn-l-2)} \right) x^k$$

$$= m^2 4^{-n(m-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4^{k(1-m)}}{2} \sum_{l=0}^{mk-1} \frac{s_l^{(mn)} m_{mk-l-1}^{(mn-l-1)}}{m(k-n)} \right) x^k.$$

La última igualdad anterior se justifica por la relación entre los coeficientes de los polinomios $M(x)$ y $N(x)$, como se muestra en la Definición 4.

Todavía necesitamos determinar el valor de C en la Ecuación (15). Comparando coeficientes de x^n en dicha ecuación, junto con los cálculos realizados hasta este punto, obtenemos $0 = C + m4^{-n(m-1)}((1-m)log(4) + \pi i(m-1)) \cdot \sum_{k=1}^{mn} \frac{4^k s_{mn-k}^{(mn)}}{2k\binom{2k}{k}} + m4^{-n(m-1)} Coef_{x^n}\left(x^n \sum_{j=0}^{m-1} s_{mn}^{(mn)} arcsin^2(\sqrt{z})\right) - m4^{-n(m-1)} Coef_{x^n}\left(x^n \sum_{j=0}^{m-1} \frac{arcsin(\sqrt{z})\sqrt{z(1-z)} \sum_{k=0}^{mn-1} s_k^{(mn)} M_{mn-n-1}(z) z^k}{z^{mn}}\right)$. Sprugnoli [17] demostró que $arcsin^2(\sqrt{z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k z^k}{k^2 \binom{2k}{k}}$, por lo que tenemos $Coef_{x^n}\left(x^n s_{mn}^{(mn)} \sum_{j=0}^{m-1} arcsin^2(\sqrt{z})\right) =$

$Coef_{x^n}\left(\frac{x^n s_{mn}^{(mn)}}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\quad\frac{4^k(4^{1/m-1}w^j)^k x^{k/m}}{k^2\binom{2k}{k}}\right)=0.$ Por otro lado, por la Ecuación (14), obtenemos

$$arcsin(\sqrt{z})\sqrt{z(1-z)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\quad\frac{4^k z^k}{k\binom{2k}{k}}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\quad\frac{4^k z^{k+1}}{k\binom{2k}{k}}=z-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\quad\frac{4^k z^{k+1}}{k(2k+1)\binom{2k}{k}}.$$

entonces

$$Coef_{x^n}\left(x^n\sum_{j=0}^{m-1}\quad\frac{arcsin(\sqrt{z})\sqrt{z(1-z)}}{z^{mn}}\sum_{k=0}^{mn-1}\quad s_k^{(mn)}M_{mn-k-1}(z)z^k\right)\quad=Coef_{x^n}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1}\quad\frac{\sum_{k=0}^{mn-1}\quad\left(s_k^{(mn)}\left(z-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\quad\frac{4^l z^{l+1}}{l(2l+1)\binom{2l}{l}}\right)\sum_{p=0}^{mn-k-1}\quad m_p^{(mn-k-1)}z^{p+k}\right)}{(4^{1/m-1}w^j)^{mn}}\right)\quad=Coef_{x^n}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1}\quad\frac{z^{mn}\sum_{k=0}^{mn-1}\quad s_k^{(mn)}\left(m_{mn-k-1}^{(mn-k-1)}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{mn-k-1}\quad\frac{4^l m_{mn-k-l-1}^{(mn-k-1)}}{l(2l+1)\binom{2l}{l}}\right)}{(4^{1/m-1}w^j)^{mn}}\right)\quad=$$

$$m\left(\sum_{l=0}^{mn-1}\quad s_l^{(mn)}m_{mn-l-1}^{(mn-l-1)}-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{mn-2}\quad\sum_{p=1}^{mn-l-1}\quad\frac{s_l^{(mn)}4^p}{p(2p+1)\binom{2p}{p}}m_{mn-l-p-1}^{(mn-l-1)}\right).$$

La demostración queda entonces completa por las remarcas 1 y 3. □

Corolario 2. *Para todo entero fijo $n\geq 1$ y para todo $|x|<1$, se tiene* $\sum_{k=n+1}^{\infty}\quad\frac{4^k x^k}{(k-n)^2\binom{2k}{k}}=$

$$\frac{2^{2n+1}x^n}{\binom{2n}{n}}(arcsin(\sqrt{x}))^2-arcsin(\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\quad s_k^{(n)}\quad_{n-k-1}(x)x^k\right)\quad+$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\quad\underline{r_k}x^k+\underline{q}x^n,$$

$$\underline{r_k}:=\left(\frac{t_{k-1}^{(n-2)}}{k-n}+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}\quad\frac{s_l^{(n)}m_{k-l-1}^{(n-l-1)}}{k-n}\right)+\frac{4^k}{(k-n)^2}\left(\frac{1}{4^k}-\frac{1}{\binom{2k}{k}}\right);\ \underline{q}:$$

$$=\left(-\frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}}\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{n-2}\quad s_l^{(n)}\left(\frac{4^{n-l}}{(n-l)\binom{2(n-l)}{n-l}}-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-l-1}\quad\frac{4^p}{p(2p+1)\binom{2p}{p}}m_{n-l-1-p}^{(n-l-1)}\right)\right),$$

y el polinomio $M_{n-k-1}(x)$ es como en la Definición 3.

Aplicaciones

Presentamos aquí algunos resultados nuevos concernientes a sumas en las que el coeficiente binomial central generalizado aparece en el denominador, utilizando la teoría desarrollada en este trabajo.

Sea $x = \pm\frac{1}{4}$. Variando los valores de m, n en el Teorema 1, obtenemos

$$(a)\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(k-2)\binom{2k}{k}} = \frac{13}{36} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}, (b)\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-3)\binom{2k}{k}}$$

$$= -\frac{19}{200} + \frac{\sqrt{5}}{10} arcsinh(1/2), (c)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\binom{4k}{2k}}$$

$$= \frac{7}{18} - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{\sqrt{5}}{15} arcsinh(1/2), (d)\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-2)\binom{4k}{2k}}$$

$$= -\frac{219}{4900}$$

$$-\frac{\sqrt{34}}{595}\left(\left(2\sqrt{\sqrt{17}+1} - 7\sqrt{\sqrt{17}-1}\right) arcsin\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{2}}}{4}\right)\right.$$

$$+ \left(2\sqrt{\sqrt{17}-1}\right.$$

$$\left. + 7\sqrt{\sqrt{17}+1}\right) log\left(\frac{\sqrt{2(\sqrt{17}-3)} + \sqrt{5-2\sqrt{2}} + \sqrt{5+2\sqrt{2}}}{4}\right)),$$

$$(e)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)\left(\frac{6k}{3k}\right)}$$

$$=\frac{37}{200}-\frac{7\pi\sqrt{3}}{180}$$

$$+\frac{1}{210}\left(\sqrt{42(\sqrt{21}+3)}log\left(\frac{\sqrt{2(\sqrt{21}-3)}+\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}\right)\right.$$

$$\left.-\sqrt{42(\sqrt{21}-3)}arcsin\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}\right)\right).$$

Sea $x=\frac{1}{4}$. Variando los valores de m,n en el Teorema 2, obtenemos

$$(a)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-2)^2\left(\frac{2k}{k}\right)}=-\frac{53}{108}+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi^2}{108},(b)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2\left(\frac{4k}{2k}\right)}$$

$$=-\frac{41}{27}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi^2}{54}+\frac{5\sqrt{5}arcsinh(1/2)}{9}$$

$$-\frac{2}{3}arcsinh^2(1/2),(c)\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{(k-3)^2\left(\frac{4k}{2k}\right)}$$

$$=-\frac{406705027}{11093751900}+\frac{1823\sqrt{3}\pi}{237160}+\frac{\pi^2}{8316}$$

$$-\frac{arcsinh^2(1/2)}{231}\qquad\qquad-\frac{3137\sqrt{5}arcsinh(1/2)}{640332},$$

$$(d)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2\binom{6k}{3k}}$$

$$= -\frac{134}{125}+\frac{21\pi\sqrt{3}}{200}+\frac{\pi^2}{120}-\frac{12}{5}log^2(2)+\frac{3}{5}arcsin^2\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{200}arcsin\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}\right)\left(23\sqrt{3(2\sqrt{21}+3)}-27\sqrt{2\sqrt{21}-3}\right)$$

$$-\frac{log(2)}{100}\left(23\sqrt{3(2\sqrt{21}-3)}+27\sqrt{2\sqrt{21}+3}\right)$$

$$-\frac{3log^2\left(\sqrt{2(\sqrt{21}-3)}+\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{5}$$

$$+log\left(\sqrt{2(\sqrt{21}-3)}+\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{12log(2)}{5}\right.$$

$$\left.+\frac{23\sqrt{3(2\sqrt{21}-3)}+27\sqrt{2\sqrt{21}+3}}{200}\right).$$

Agradecimientos. El autor agradece sinceramente al árbitro por la cuidadosa lectura del manuscrito y por sus sugerencias constructivas, las cuales han mejorado significativamente la calidad de las referencias y resaltado la relevancia de trabajos previos.

Referencias bibliográficas

- K. Adegoke, R. Frontczak, and T. Goy, On a family of infinite series with reciprocal Catalan numbers, *Axioms* **11** (2022), 165.
- K. Adegoke, R. Frontczak, and T. Goy, Fibonacci-Catalan series, *Integers* **22** (2022), #A110.
- K. Adegoke, R. Frontczak, and T. Goy, Combinatorial sums, series and integrals involving odd harmonic numbers, *Afr. Mat.* **36** (2025), Article 124. https://doi.org/10.1007/s13370- 025-01346-1

- T. Amdeberhan, X. Guan, L. Jiu, V. H. Moll, and C. Vignat, A series involving Catalan numbers: Proofs and demonstrations, *Elem. Math.* **72** (2016), 109-121.
- K. N. Boyadzhiev, Power series with inverse binomial coefficients and harmonic numbers, *Tatra Mt. Math. Publ.* **70** (2017), 199-206.
- K. N. Boyadzhiev, Series with central binomial coefficients, Catalan numbers and harmonic numbers, *J. Integer Seq.* **15** (2012), Article 12.1.7.
- H. Chen, Interesting series associated with central binomial coefficients, Catalan numbers and harmonic numbers, *J. Integer Seq.* **19** (2016), Article 16.1.5.
- W. Chu and F. L. Esposito, Evaluation of Apery-like series through multisection method, *J. Class. Anal.* **12** (2018), 55–81.
- W. Chu and F. L. Esposito, Multisection method for Apery-like series, *Online J. Anal. Comb.* **13** (2018), #07.
- W. Chu and D. Zheng, Infinite series with harmonic numbers and central binomial coefficients, *Int. J. Number Theory* **5** (2009), 429-448.
- H. W. Gould, *Combinatorial Identities*: *A Standardized Set of Tables Listing 500 Binomial Coefficient Summations*, West Virginia University, 1972.
- D. Gün and Y. Simsek, Generating functions for reciprocal Catalan-type sums: approach to linear differentiation equation and (p-adic) integral equations, *Turk. J. Math.* **47** (2023), 830-845.
- T. Koshy, *Catalan Numbers with Applications*, Oxford University Press, 2008.
- T. Koshy and Z. G. Gao, Convergence of a Catalan series, *College Math. J.* **43** (2012), 141-146.
- D. H. Lehmer, Interesting series involving the central binomial coefficient, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 449-457.
- Z. A. Melzak, *Companion to Concrete Mathematics*, Vol. 1, Wiley, 1973.
- R. Sprugnoli, Sums of reciprocals of the central binomial coefficients, *Integers* **6** (2006), #A27.

- S. M. Stewart, The inverse versine function and sums containing reciprocal central binomial coefficients and reciprocal Catalan numbers, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.* **53** (2021), 1-12.
- R. Witula and D. Slota, Finite sums connected with the inverses of central binomial numbers and Catalan numbers, *Asian-Eur. J. Math.* **1** (2008), 439-448.
- L. Yin and F. Qi, Several series identities involving the Catalan numbers,*Trans. A. Razmadze Math. Inst.* **172** (2018), 466-474.
- R. Zurita, Elementary functions associated with series involving reciprocals of central binomial coefficients, *J. Integer Seq.* **27** (2024), Article 24.6.8.

COMUNICACIONES CIENTÍFICAS

SÍNTESIS DE CONTROLADORES ROBUSTOS POR REALIMENTACIÓN DE SALIDA BASADA EN OBSERVADORES Y ABSTRACCIÓN SIMBÓLICA: TEORÍA DE CONTROL Y MÉTODOS FORMALES

(Comunicación)

PhD. W. ALEJANDRO APAZA-PEREZ, ANTOINE GIRARD
wapazap@fcpn.edu.bo

Semblanza:

W. Alejandro APAZA-PEREZ recibió su grado de Licenciado en Matemáticas (2011) por la Universidad Mayor de San Andrés UMSA, La Paz Bolivia. También realizo su maestría en matemáticas en el instituto de Matemáticas y su doctorado (con honores) en ingeniería eléctrica - control automático, ambos de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) en México. Ocupó cargos postdoctorales en centros de **investigación**: Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système - IMS (Université de Bordeaux) y Laboratoire des signaux et systèmes – L2S (CentralSupélec, Université Paris-Saclay), ambos en Francia. Estancias de investigación en el Max Planck Institute for Software Systems (MPI-SWS) en Alemania y en el Cyber-Physical Systems Laboratory de la Universidad de California en Estados Unidos. Actualmente se encuentra como parte del plantel docente de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés.

Resumen

El control simbólico es una manera de manejar sistemas continuos o híbridos cuando las especificaciones vienen dadas en lenguaje lógico. Para ello se construyen modelos simbólicos, que describen el comportamiento del sistema con un número finito de estados y transiciones. En la mayoría de los trabajos publicados se parte del supuesto de que se conoce el estado completo de la planta, algo poco realista en muchas aplicaciones. Aquí planteamos un escenario más real: solo disponemos de información parcial de los estados. Proponemos una

abstracción que permite sintetizar controladores usando realimentación de salida, teniendo en cuenta también perturbaciones y ruido en las mediciones. De paso, conectamos el diseño de observadores (teoría clásica) con la síntesis de controladores (métodos formales). Finalmente mostramos un ejemplo numérico para ilustrar cómo funciona todo.

Palabras clave

Control por realimentación de salida; abstracción simbólica; observadores robustos; sistemas no lineales inciertos.

1. Introducción

En los últimos años los problemas de control han cambiado bastante. Ya no basta con estabilizar un sistema o hacer que siga una referencia; ahora se piden cosas más complejas como seguridad, alcanzabilidad o condiciones expresadas en lógica temporal. Esto es especialmente cierto en los sistemas ciberfísicos, donde un proceso físico se conecta con una plataforma digital. Para responder a esa demanda han surgido los métodos formales, que vienen de la computación pero se han adaptado a sistemas dinámicos.

Una de esas técnicas es el control simbólico. La idea es simple: se reemplaza el sistema continuo original por un modelo abstracto con un número finito de estados y entradas. Sobre ese modelo se aplican algoritmos de búsqueda o de juegos para encontrar un controlador que cumpla la especificación. Luego ese controlador se refina para funcionar en el sistema real, usando relaciones de simulación o refinamiento. El método ha funcionado bien en ejemplos como redes eléctricas o vehículos autónomos.

Sin embargo, casi todos los trabajos asumen algo que en la práctica es muy difícil: que el controlador conoce el estado completo del sistema en todo momento. Es decir, suponen que se pueden medir todas las variables de estado con precisión. En la realidad eso casi nunca pasa. Generalmente solo se miden algunas variables (posiciones, temperaturas, presiones) y además esas mediciones tienen ruido. Otras variables como velocidades, flujos o concentraciones no se miden directamente, o hacerlo resulta caro o poco fiable. Por eso, desarrollar control simbólico con solo realimentación de salida es un problema importante.

Este trabajo trata de resolver esa limitación. La propuesta es juntar dos líneas que han avanzado separadas. Por un lado la teoría de observadores, que viene del control clásico y nos permite estimar los estados que no medimos. Por otro lado los métodos formales, que nos dan las abstracciones simbólicas y las relaciones de refinamiento. La idea concreta es esta: primero diseñamos un observador robusto para el sistema, de forma que podamos garantizar que el error de estimación nunca pasa de un valor conocido, al que llamamos ε. Luego, en lugar de abstraer el sistema original, abstraemos el sistema que resulta de juntar la planta con el observador, pero en tiempo discreto. Demostramos que, si el error de estimación está siempre dentro de una caja de radio ε, entonces existe una relación de refinamiento por realimentación entre el sistema real y la abstracción. Eso significa que cualquier controlador que diseñemos sobre la abstracción (que trabaja con estados cuantificados) se puede implementar directamente en el sistema real, simplemente alimentándolo con la estimación cuantificada del observador. Así el controlador final solo necesita las mediciones de salida, nunca los estados no medidos.

Además de la teoría, mostramos un ejemplo numérico concreto: el control de crucero adaptativo de un coche autónomo. En ese sistema la velocidad del coche de delante no se mide, solo se dispone de la distancia relativa y de la velocidad del propio vehículo. Explicamos paso a paso cómo diseñar el observador, calcular ε, construir la abstracción y sintetizar un controlador que garantiza seguridad y confort. Las simulaciones confirman que el enfoque funciona.

El resto del documento se organiza así. En la sección 2 presentamos el modelo del sistema, el observador y la construcción de la abstracción simbólica. En la sección 3 describimos el caso de estudio del control de crucero adaptativo, con parámetros y resultados de simulación. En la sección 4 damos las conclusiones y comentamos posibles trabajos futuros.

2. Metodología / Desarrollo teórico

Para que quede claro cómo se llega a la implementación, vamos a dividir esta sección en varios pasos. Primero describimos el sistema que queremos controlar. Luego explicamos cómo diseñar un observador que nos dé una cota conocida del error. Después mostramos cómo

construir la abstracción simbólica a partir de esa cota. Finalmente explicamos cómo se refina el controlador para que funcione solo con las mediciones de salida.

2.1 El sistema que consideramos

Trabajamos con un sistema no lineal continuo que tiene perturbaciones y ruido en las mediciones. La forma general es

$$\dot{\xi}(t) = f\big(\xi(t), u(t), w(t)\big)$$
$$y(t) = h\big(\xi(t), \delta(t)\big)$$

$\xi(t)$ es el estado del sistema, que en general no podemos medir completo. $u(t)$ es la entrada de control, la que podemos elegir. $y(t)$ es la salida medida, que es lo único que conocemos del sistema en tiempo real. $w(t)$ y $\delta(t)$ son perturbaciones y ruido, respectivamente. Lo importante es que ambas señales están acotadas. Es decir, existen números b_1 y b_2 tales que $\| w(t) \| \leq b_1$ y $\| \delta(t) \| \leq b_2$ para todo tiempo t. No necesitamos saber más de ellas.

El problema es que queremos diseñar un controlador que cumpla una especificación compleja (como seguridad o alcanzabilidad) pero que solo use la información de $y(t)$, no todo $\xi(t)$. Para eso necesitamos estimar los estados que no medimos.

2.2 Diseño del observador y cálculo de la cota del error

Un observador es un sistema dinámico auxiliar que toma las mismas entradas $u(t)$ y las salidas medidas $y(t)$ y produce una estimación $\hat{\xi}(t)$ del estado real. Lo escribimos como

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = g\left(\hat{\xi}(t), u(t), y(t)\right)$$

La función g se elige de modo que el error de estimación $e(t) = \hat{\xi}(t) - \xi(t)$ tienda a un conjunto pequeño y acotado. Para garantizar eso, usamos una función de Lyapunov. En concreto, suponemos que existe una función $V(e)$ definida positiva y cuadrática (como $V(e) = e^T P e$ con P simétrica definida positiva) que satisface

$$\frac{d}{dt} V\big(e(t)\big) \leq -\beta V\big(e(t)\big) + \gamma_1(|w(t)|) + \gamma_2(|\delta(t)|)$$

con $\beta > 0$ y $\gamma 1, \gamma 2$ funciones de clase κ (es decir, crecientes y nulas en cero). Como w y δ están acotadas, los términos $\gamma_1(\| w \|)$ y $\gamma_2(\| \delta \|)$ también lo están. Entonces la desigualdad anterior nos dice que $V(e)$ decae mientras sea grande, y que a la larga se mantiene por debajo de un umbral. Se puede demostrar que existe un número $c > 0$ tal que

para todo tiempo t suficientemente grande, $V(e(t)) \leq c$. De ahí se deduce que el error está contenido en un conjunto que a su vez está dentro de un hiperrectángulo $N_\epsilon(0) = \{e \in R^n \mid |e_i| \leq \epsilon_i, i = 1, \dots, n\}$. Esto significa que podemos calcular un vector $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ tal que para cada componente del error se cumple $| e_i(t) | \leq \epsilon_i$ después de un tiempo transitorio. El cálculo concreto de ϵ se hace a partir de los parámetros de la desigualdad de Lyapunov y de las cotas de las perturbaciones. Este ϵ es clave para lo que sigue.

2.3 Muestreo y cuantificación para la abstracción

Nuestro controlador se va a implementar en un sistema digital. Por lo tanto, debemos muestrear el sistema planta-observador con un periodo τ. Elegimos τ de acuerdo con la dinámica del sistema (por ejemplo, un valor que permita capturar los fenómenos relevantes). Definimos entonces el sistema discreto S_1 cuyo estado en el instante $k\tau$ es la pareja $(x_k, \hat{x}_k) = \left(\xi(k\tau), \hat{\xi}(k\tau)\right)$. La transición de un instante al siguiente viene dada por la solución de las ecuaciones diferenciales durante el intervalo τ, con una entrada constante a trozos (lo que es habitual en control digital).

Ahora queremos construir un modelo abstracto con un número finito de estados. Para eso cuantificamos el espacio donde vive la estimación $\hat{x}$. Elegimos una malla uniforme con paso $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Los puntos de la malla son de la forma $q = (k_1\eta_1, \dots, k_n\eta_n)$ con k_i enteros, pero solo dentro de un dominio acotado que nos interese. Llamamos X_2 al conjunto de esos puntos. También cuantificamos las entradas: elegimos un paso μ y un conjunto finito U_2 de valores de control posibles.

2.4 Construcción de la transición abstracta teniendo en cuenta el error

El corazón del método es definir cómo pasa de un estado abstracto q a otro q' cuando aplicamos una entrada $u \in U_2$. La idea es que el sistema real, cuando la estimación está cerca de q (dentro de una caja de radio η) y el error real está acotado por ϵ, puede estar realmente en un estado x que está hasta $\epsilon + \eta$ lejos de q en cada componente. Por eso, para ser conservadores, consideramos la expansión $N_{\epsilon+\eta}(q)$, que es el conjunto de todos los puntos que distan a lo sumo $\epsilon_i + \eta_i$ de q en cada coordenada.

Luego miramos la dinámica nominal del sistema sin incertidumbres. Llamamos $F_0(x,u)$ al conjunto de estados alcanzables en un paso de muestreo (de duración τ) partiendo de un estado inicial x con entrada constante u. No podemos calcular F_0 para cada x porque hay infinitos, pero podemos aproximar tomando el conjunto $F_0(N_{\epsilon+\eta}(q),u)$, que es la imagen de toda esa caja. Ese conjunto puede ser grande, pero luego lo expandimos con una caja de radio ϵ para cubrir el efecto del error de estimación que persiste. Obtenemos así $N_\epsilon(F_0(N_{\epsilon+\eta}(q),u))$. Finalmente, para volver al mundo discreto, cuantificamos ese conjunto: un punto q' de la malla está en la transición si la caja $N_\eta(q')$ (la celda de cuantificación alrededor de q') intersecta al conjunto anterior. En fórmulas:

$$F_2(q,u) = \{q' \in X_2 \mid N_\epsilon(F_0(N_{\epsilon+\eta}(q),u)) \cap N_\eta(q') \neq \emptyset\}$$

Esta definición asegura que si el sistema real parte de un estado cuya estimación está en la celda de q y el error está dentro de ϵ, entonces al aplicar u su nuevo estado estimado (tras un paso) caerá en alguna celda q' que pertenece a $F_2(q,u)$. Es decir, la abstracción captura todas las posibilidades reales, sin omitir ninguna.

2.5 Relación de refinamiento y controlador resultante

El resultado que desarrollamos afirma que la relación

$$R = \{\big((x,\hat{x}),q\big) \mid \hat{x} \in N_\eta(q)\}$$

es una relación de refinamiento por realimentación desde el sistema concreto S_1 (el muestreado de la planta con el observador) hacia la abstracción S_2. ¿Qué significa esto? Básicamente que podemos diseñar un controlador sobre la abstracción, que trabaja con estados finitos q, y luego llevarlo al sistema real sin perder garantías. La forma de hacerlo es muy simple: en cada instante de muestreo, tomamos la estimación actual $\hat{x}$ del observador, la cuantificamos al punto de la malla más cercano $q = Q(\hat{x})$, y le preguntamos al controlador abstracto qué entrada u debe aplicar según ese q y el historial de estados abstractos. Esa misma entrada u se aplica al sistema real. En otras palabras, el controlador real es

$$C_1(\hat{x}) = C_2\big(Q(\hat{x})\big)$$

Sin necesidad de conocer el estado real ξ. Este resultado es importante porque nos permite aprovechar toda la maquinaria de síntesis de controladores simbólicos (juegos de

alcanzabilidad, especificaciones temporales, etc.) en sistemas donde solo tenemos salidas medidas.

2.6 Resumen del procedimiento para la implementación

Para aplicar esta metodología a un caso concreto como el control de crucero adaptativo, seguimos estos pasos:

Modelar el sistema en la forma continua con perturbaciones y ruido, identificando los estados medibles y los no medibles.

Diseñar un observador (por ejemplo, lineal o extendido) que estabilice el error, y calcular la cota ϵ a partir de la teoría de Lyapunov.

Elegir el periodo de muestreo $\boldsymbol{\tau}$ y los pasos de cuantificación η y μ. La elección es un compromiso: pasos pequeños dan más precisión pero más estados en la abstracción.

Construir la abstracción $\boldsymbol{S_2}$ usando la fórmula de transición con F_0 y ϵ. Esto se hace numéricamente, explorando todos los q y u dentro del dominio de interés.

Sintetizar el controlador abstracto $\boldsymbol{C_2}$ que cumpla la especificación deseada (seguridad, alcanzabilidad, etc.). Hay herramientas computacionales como SCOTS o CoSyMA que hacen esto automáticamente.

Implementar $\boldsymbol{C_1}$ en el sistema real, alimentando al controlador abstracto con la estimación cuantificada del observador.

En la siguiente sección mostramos cada uno de estos pasos aplicados al ejemplo del control de crucero adaptativo, con números concretos y resultados de simulación.

3. Resultados: Control de crucero adaptativo (ACC)

Ahora que la metodología está clara, pasamos al ejemplo. El sistema ACC consta de dos vehículos que circulan en la misma dirección. El vehículo 2 es el que controlamos, y el vehículo 1 es el que va delante. La variable que nos interesa es la distancia relativa $d(t)$ entre ambos, definida de modo que $d \leq 0$ significa que están demasiado cerca (colisión si se hace muy negativo). La dinámica es

$$\dot{d} = v_1 - v_2$$

$$\dot{v_2} = \frac{u - h(v_2)}{M}$$

$$\dot{v_1} = \Gamma(v_1, w)$$

Acá v_2 es la velocidad del vehículo controlado, v_1 la velocidad del vehículo precedente, u la fuerza de freno/aceleración (entrada de control), M la masa, y $h(v_2) = f_0 + f_1 v_2 + f_2 v_2^2$ es un modelo de fricción y aerodinámica. La función $\Gamma(v_1, w)$ modela cómo acelera o frena el vehículo delantero, con w una perturbación acotada. Los valores numéricos se dan en la Tabla :

M	1370	Kg	u^{max}	0.2 g	m/s^2	w^{max}	3	m/s^2
f_0	51	N	v_2^{min}	10	m/s	ϑ^*	1.5	s
f_1	1.2567	Ns/m	v_2^{max}	30	m/s	v^*	20	m/s
f_2	0.4342	Ns^2/m^2	v_1^{min}	12	m/s	τ	0.5	s
g	9.82	m/s^2	v_1^{max}	28	m/s	α	0.5	
u^{min}	-0.3 g	m/s^2	w^{min}	-1.7	m/s^2			

La salida medida es

$$y_d = d + \delta_1, \quad y_{v_2} = v_2 + \delta_2$$

Es decir, medimos la distancia relativa y la velocidad propia, pero con ruido δ_1, δ_2 acotado. La velocidad v_1 del vehículo delantero no se mide. Las especificaciones son:

Seguridad: $d(t) \leq 0$ en todo momento.

Restricción de velocidad: $v_2(t)$ debe estar entre v_2^{min} y v_2^{max} .

Confort: queremos que el tiempo de intervalo $\vartheta(t) = -d(t)/v2(t)$ se acerque a $\theta^* = 1.5\ s$ cuando sea posible, y que $v_2(t)$ se acerque a $v^* = 20\ m/s$. Como no siempre se pueden cumplir ambas a la vez, se define una función de distancia H y se busca un controlador de mínima violación.

3.1 Diseño del observador y cálculo de ϵ

Elegimos un observador de la forma lineal con términos de corrección:

$$\dot{\hat{d}} = \hat{v}_1 - \hat{v}_2 + l_1(\hat{d} - y_d) + l_2(\hat{v}_2 - y_{v_2})$$

$$\dot{\hat{v}}_2 = \frac{u - h(y_{v_2})}{M} + l_3(\hat{d} - y_d) + l_4(\hat{v}_2 - y_{v_2})$$

$$\dot{\hat{v}}_1 = l_5(\hat{d} - y_d) + l_6(\hat{v}_2 - y_{v_2})$$

Observar que en la ecuación de $\hat{v}_2$ usamos $h(y_{v_2})$ en lugar de $h(v_2)$, porque no conocemos v_2 real. Esto introduce una no linealidad pero se puede manejar porque h es localmente Lipschitz.

Definimos el error de estimación $e_d = \hat{d} - d, \quad e_{v_2} = \hat{v}_2 - v_2, \quad e_{v_1} = \hat{v}_1 - v_1$. Las ecuaciones del error se pueden escribir en forma matricial

$$\dot{e} = (A + LC)e + (\text{términos de perturbación})$$

Elegimos las ganancias $l_1, \ldots, l_6$ para que la matriz $A + LC$ sea Hurwitz (todos sus autovalores con parte real negativa). Luego resolvemos una desigualdad de Lyapunov para obtener una matriz P y calcular los parámetros $\beta, \gamma 1, \gamma 2$. De ahí obtenemos la cota final ϵ. Se considera los valores $\bar{\delta}1 = \bar{\delta}2 = 0.01,\ \bar{\Gamma} = 3$, se llega a

$$\epsilon_d = 0.04, \epsilon_{v_2} = 0.06, \epsilon_{v_1} = 0.59$$

Esto significa que en régimen permanente, el error en la estimación de la velocidad del vehículo delantero puede ser hasta $0.59\ m/s$, lo cual es aceptable.

El resultado se muestra en una figura 1 donde se ven, para diferentes valores de v_1:

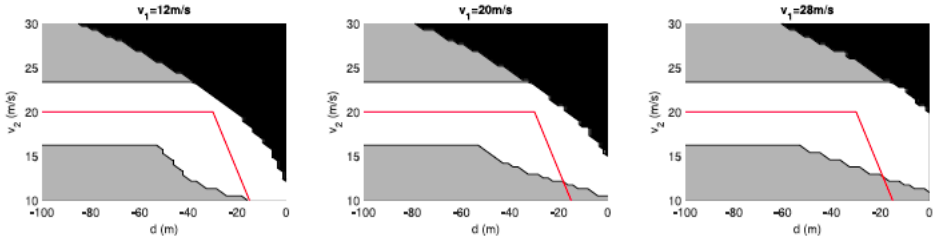


Figura 1: la región blanca (atractor deseado), la gris (estados que llegan al atractor) y la negra (estados no controlables).

La simulación se hizo con un escenario agresivo: el vehículo 1 parte a 20 m/s, mantiene esa velocidad 25 segundos, luego frena con la máxima deceleración hasta alcanzar 10 m/s (tarda unos 50 s), luego acelera de nuevo hasta 30 m/s (otros 25 s). El vehículo 2 comienza con *d*=−50 m, *v*2=25 m/s, y su observador parte de los mismos valores nominales pero con pequeñas desviaciones. El ruido de medición $\delta 1$, $\delta 2$ es ruido blanco de amplitud 0.01.

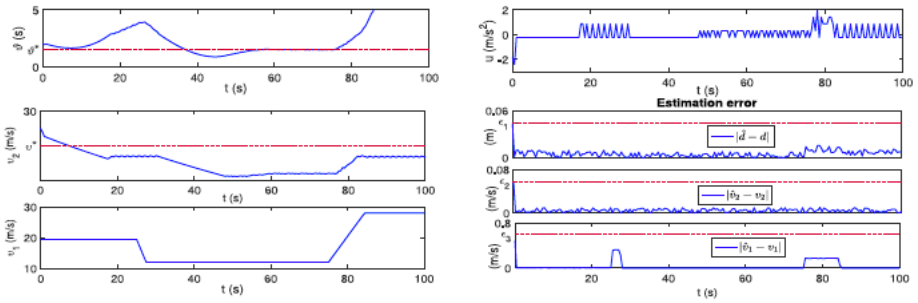


Figura 2: Trayectorias simuladas del sistema utilizando el controlador basado en observador: (lado izquierdo) evolución del intervalo de tiempo entre vehículos y de las velocidades de los vehículos 1 y 2; (lado derecho) la entrada de control del vehículo 2 y los errores de estimación entre los estados reales y los del observador.

Los resultados se ven en la figura 2. Al principio, como el tiempo de intervalo $\theta = -d/v_2$ es mayor que $\theta^* = 1.5\ s$, el controlador se enfoca en regular la velocidad alrededor de $v^* = 20\ m/s$. En la figura 2 de la derecha se ven los errores de estimación. La pérdida de calidad es aceptable dado que el observador solo introduce un error de hasta 0.59 m/s en v_1.

4. Conclusiones

Hemos detallado una metodología completa para sintetizar controladores por realimentación de salida usando abstracciones simbólicas y observadores robustos. El paso clave es calcular una cota ϵ del error de estimación, que luego se usa para construir la abstracción de manera conservadora. El refinamiento es inmediato: cuantificar la estimación y aplicar el control abstracto. El ejemplo del control de crucero adaptativo muestra que el método es práctico, que los errores de estimación se mantienen dentro de los límites teóricos y que las especificaciones se cumplen. Futuros trabajos deberían analizar el comportamiento transitorio antes de que el error entre en el invariante, así como extender la técnica a sistemas con retardos de comunicación o a plantas con parámetros inciertos.

Referencias bibliográficas

- Tabuada, P. (2009). Verification and Control of Hybrid Systems. Springer.
- Reissig, G., Weber, A., & Rungger, M. (2017). Feedback refinement relations for the synthesis of symbolic controllers. IEEE Trans. Autom. Control, 62(4), 1781-1796.
- Girard, A. (2012). Controller synthesis for safety and reachability via approximate bisimulation. Automatica, 48(5), 947-953.
- Nilsson, P. et al. (2016). Correct-by-construction adaptive cruise control: Two approaches. IEEE Trans. Control Syst. Technol., 24(4), 1294-1307.

- Apaza Perez, W. A., Girard, A., Combastel, C., & Zolghadri, A. (2021). Symbolic observer-based controller for uncertain nonlinear systems. IEEE Control Systems Letters, 5(1), 127-132.

ANÁLISIS RECONSTRUCTIVO DE PATRONES DE MANCHAS DE SANGRE MEDIANTE EL MÉTODO TRIGONOMÉTRICO EN DISTINTOS TIPOS DE SOPORTE

(Comunicación)

M. Sc. BERNAL A. & CHOQUE O.
sbttebeck777@gmail.com

Semblanza:

Cap. M. Sc. Andree Bernal Calderón es investigador, perito y docente en Criminalística y Ciencias Forenses, con más de 13 años de experiencia en procesamiento de la escena del crimen e investigación pericial en Bolivia. Es doctorante en Ciencias Forenses y cuenta con Maestrías en Ciencias Forenses y Ciencias Policiales y Criminalística por la UNIPOL. Posee formación especializada nacional e internacional en análisis reconstructivo, análisis de patrones de manchas de sangre, fotografía forense y criminalística, habiendo realizado capacitaciones en Argentina, México y Brasil. Asimismo, desarrolla actividades académicas, investigativas y de capacitación orientadas al fortalecimiento científico y técnico de las ciencias forenses y la criminalística aplicada en Bolivia.

Resumen

El análisis de patrones de manchas de sangre constituye una herramienta reconstructiva de gran importancia dentro de la criminalística, debido a que permite establecer la dinámica de hechos violentos mediante principios físicos, biológicos y matemáticos. La presente investigación tuvo como objetivo analizar comparativamente los efectos producidos por distintos tipos de soporte en la determinación del punto de convergencia y área de origen de manchas de sangre producidas por salpicadura mediante el método trigonométrico. Se desarrolló un estudio experimental con enfoque cuantitativo utilizando tres superficies: pared pintada, ladrillo y cerámica. Se realizaron diez ensayos por cada soporte, generando patrones de manchas de sangre bajo condiciones controladas. Posteriormente, se efectuó la medición del eje mayor y eje menor de las manchas para calcular el ángulo de impacto y determinar el

punto de origen mediante relaciones trigonométricas. Los resultados obtenidos evidenciaron que, tomando como referencia una distancia experimental de 50 cm, la variación registrada entre los distintos soportes fue únicamente de ±3 cm, sin presentar dispersión significativa entre los datos obtenidos. Estos hallazgos demuestran que las características físicas de las superficies no afectan de manera relevante la precisión reconstructiva del método trigonométrico. Se concluye que el método empleado presenta adecuada exactitud, repetibilidad y valor científico para la determinación del punto de convergencia y área de origen en patrones de manchas de sangre producidas por salpicadura, constituyendo además una base técnica para la estandarización de protocolos periciales en criminalística de campo.

Palabras clave

Análisis de patrones de manchas de sangre, Método trigonométrico, Criminalística reconstructiva, Manchas de sangre por salpicadura, Biología forense**.**

Introducción

El análisis de patrones de manchas de sangre (*Bloodstain Pattern Analysis* – BPA) constituye una disciplina especializada de la biología forense y la criminalística orientada al estudio de la forma, distribución, tamaño, cantidad y localización de las manchas hemáticas presentes en una escena del crimen, con la finalidad de reconstruir técnica y científicamente la dinámica de los hechos que las produjeron (Bevel & Gardner, 2008). A diferencia de otros estudios hematológicos enfocados principalmente en la identificación genética de individuos, el BPA permite establecer información reconstructiva relacionada con posiciones, desplazamientos, mecanismos de producción, direccionalidad, secuencia de eventos y determinación del punto de origen de las manchas de sangre (James, Kish & Sutton, 2005).

Desde el punto de vista científico, el análisis de patrones de manchas de sangre se fundamenta en principios de hematología, física, dinámica de fluidos y matemática aplicada, particularmente en el estudio de trayectorias y relaciones trigonométricas (Wonder, 2011). La sangre, al comportarse como un fluido biológico, responde a leyes físicas predecibles durante su desplazamiento, impacto y dispersión, permitiendo que las manchas generadas conserven información geométrica susceptible de medición y análisis reconstructivo (Miller, 2012).

Los patrones de manchas de sangre son clasificados generalmente en tres categorías principales: patrones pasivos, patrones por transferencia y patrones proyectados o activos (SWGSTAIN, 2009). Los patrones pasivos son producidos principalmente por la acción de la gravedad, como goteos, acumulaciones y flujos. Los patrones por transferencia se generan por el contacto entre una superficie con sangre y otra sin ella, originando huellas, arrastres o limpiezas. Por otra parte, los patrones activos o proyectados son aquellos producidos cuando una fuerza externa actúa sobre una fuente de sangre, ocasionando la dispersión de gotas en múltiples direcciones (Lovatón, 2018).

Dentro de esta última clasificación, las manchas producidas por salpicadura poseen especial importancia reconstructiva debido a que cada gota conserva información relacionada con el ángulo de impacto y dirección de desplazamiento. Cuando una gota de sangre impacta perpendicularmente una superficie, la mancha tiende a presentar forma circular; sin embargo, a medida que el ángulo disminuye, la mancha adquiere una morfología elíptica que permite calcular matemáticamente el ángulo de incidencia mediante relaciones trigonométricas entre el eje mayor y eje menor de la mancha (MacDonell, 1997). A partir de estos cálculos es posible determinar el punto de convergencia y el área de origen de las proyecciones hemáticas, permitiendo reconstruir espacialmente la dinámica del hecho investigado.

La importancia del presente estudio radica en que la sangre no solamente constituye un elemento útil para la identificación genética de personas mediante análisis de ADN, sino que además representa una fuente de información física y reconstructiva capaz de demostrar científicamente cómo ocurrieron determinados hechos delictivos. El análisis técnico de las manchas de sangre permite validar o refutar hipótesis investigativas, establecer posiciones relativas entre víctima y agresor, así como reconstruir mecanismos de producción de lesiones y desplazamientos ocurridos durante el evento criminal (Gardner, 2012).

No obstante, uno de los principales problemas en el análisis reconstructivo de manchas de sangre radica en que la metodología trigonométrica requiere la medición precisa del eje mayor y eje menor de las manchas para calcular el ángulo de impacto. En este contexto, las características físicas de los distintos soportes, como textura, rugosidad y porosidad, podrían influir en la morfología, dimensiones y bordes finales de las manchas, generando posibles

variaciones en los resultados reconstructivos (Attinger, Moore, Donaldson, Jafari & Stone, 2013). Esta situación genera incertidumbre respecto a la precisión del método cuando es aplicado sobre diferentes superficies presentes en escenarios reales.

En función de esta problemática, la presente investigación tuvo como objetivo analizar comparativamente los efectos producidos por tres distintos tipos de soporte —pared pintada, ladrillo y cerámica— en la determinación del punto de convergencia y área de origen de manchas de sangre producidas por salpicadura mediante el método trigonométrico. El estudio fue desarrollado en un contexto experimental controlado dentro del área temática de biología forense y criminalística reconstructiva, orientado específicamente al análisis de patrones de manchas activas producidas por salpicadura.

Las limitaciones de la investigación estuvieron relacionadas con el uso exclusivo de tres tipos de superficies y condiciones experimentales controladas, por lo que variables ambientales como temperatura, humedad, velocidad de proyección o interacción con superficies irregulares complejas no fueron consideradas dentro del estudio. Sin embargo, los resultados obtenidos permiten establecer bases científicas orientadas a la validación y estandarización de procedimientos reconstructivos aplicados al análisis de patrones de manchas de sangre en criminalística de campo.

Metodología / Desarrollo teórico

La presente investigación fue desarrollada bajo un enfoque cuantitativo de tipo experimental, orientado a evaluar comparativamente la influencia de distintos tipos de soporte en la determinación del punto de convergencia y área de origen de manchas de sangre producidas por salpicadura mediante el método trigonométrico. El diseño experimental permitió controlar variables relacionadas con la producción de las manchas, garantizando repetibilidad y uniformidad en los ensayos realizados.

El estudio se desarrolló dentro del área de biología forense y criminalística reconstructiva, empleando principios de dinámica de fluidos, geometría analítica y trigonometría aplicados al análisis de patrones de manchas de sangre (Bevel & Gardner, 2008). La población estuvo constituida por patrones de manchas de sangre activa producidas experimentalmente sobre distintos tipos de superficie, mientras que la muestra correspondió a treinta ensayos

controlados distribuidos en tres soportes: pared pintada, ladrillo y cerámica. La unidad de análisis estuvo representada por las manchas individuales seleccionadas para el cálculo del ángulo de impacto y reconstrucción espacial.



Figura 1. Tipos de soporte utilizados durante los ensayos experimentales: pared pintada, ladrillo y cerámica. Elaboración propia

Materiales e instrumentos

Para el desarrollo experimental y reconstructivo se utilizaron materiales e instrumentos orientados a garantizar precisión en la medición, fijación y documentación de las manchas de sangre.

Entre los materiales empleados se consideraron: maletín de transporte, reglas milimetradas, cinta métrica de 50 metros, transportador de ángulos, señaléticas numéricas adhesivas, testigos métricos lineales, hilo de nylon fluorescente, cinta adhesiva, libreta de notas y marcadores indelebles. Asimismo, se utilizaron elementos de bioseguridad consistentes en traje de protección, guantes de nitrilo, barbijo y lentes de seguridad, considerando el manejo de muestras biológicas potencialmente contaminantes.

Respecto a los equipos técnicos, se empleó una cámara fotográfica réflex con trípode para la fijación fotográfica de las manchas, puntero láser para reconstrucción de trayectorias, calculadora científica para operaciones trigonométricas, calibrador digital para mediciones precisas y angulímetro digital para verificación de trayectorias. Estos instrumentos permitieron reducir errores de medición y aumentar la confiabilidad de los resultados obtenidos (James, Kish & Sutton, 2005).

Procedimiento experimental y reconstructivo

El procedimiento experimental fue desarrollado bajo condiciones controladas, utilizando tres distintos tipos de soporte: pared pintada, ladrillo y cerámica. Para la generación de los patrones de manchas de sangre se estableció un punto fijo de producción a una altura de 1,50 metros y una distancia horizontal de 50 centímetros respecto a la superficie de impacto. Posteriormente, se dejó caer una bala de cañón metálica de aproximadamente 5 kg sobre una muestra de 10 ml de sangre humana, generando patrones de salpicadura por impacto de manera controlada y repetitiva.

Se realizaron diez ensayos por cada tipo de soporte, obteniendo múltiples manchas de sangre distribuidas alrededor del área de impacto. A partir de cada ensayo se seleccionaron diez manchas representativas que conservaran adecuada regularidad morfológica, evitando aquellas deformadas, sobrepuestas o con alteraciones producidas por absorción excesiva del soporte (Wonder, 2011).



Figura 2. Configuración experimental empleada para la generación controlada de patrones de manchas de sangre. Elaboración propia

Reconstrucción de la elipse y medición de ejes

El fundamento reconstructivo del método trigonométrico parte de que una gota de sangre en vuelo posee originalmente forma esférica; sin embargo, al impactar una superficie con un ángulo oblicuo, la mancha adquiere una forma elíptica producto de la deformación geométrica generada por la trayectoria de incidencia (MacDonell, 1997).

Cada mancha seleccionada fue analizada individualmente identificando dos dimensiones fundamentales:

Eje mayor: corresponde a la longitud máxima de la elipse en la dirección de desplazamiento de la gota.

Eje menor: corresponde a la anchura máxima perpendicular al eje mayor.

Las mediciones fueron realizadas utilizando regla milimetrada y calibrador digital, tomando como referencia los bordes periféricos principales de la mancha y evitando incluir dentellones secundarios o satélites hemáticos, debido a que estos podrían alterar el cálculo geométrico del ángulo de impacto (Lovatón, 2018).

La forma elíptica constituye el elemento fundamental del análisis reconstructivo, debido a que conserva la información geométrica relacionada con el ángulo de incidencia de la gota sobre la superficie.

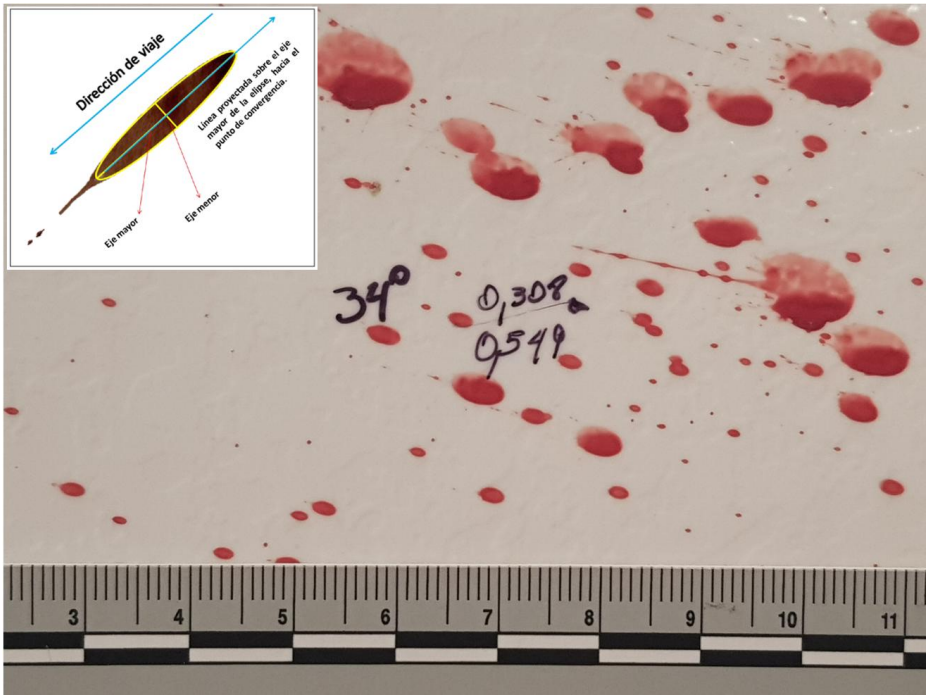


Figura 3. Medición del eje mayor y eje menor de una mancha elíptica para la determinación del ángulo de impacto. Elaboración propia.

Determinación del ángulo de impacto

Una vez obtenidas las mediciones del eje mayor y eje menor, se procedió al cálculo del ángulo de impacto mediante la función trigonométrica del seno inverso. Este método se fundamenta

en la relación geométrica existente entre la deformación elíptica y el ángulo de incidencia de la gota sobre la superficie de impacto (Bevel & Gardner, 2008).

La fórmula aplicada fue la siguiente:

$\theta = \arcsin(\text{eje menor}/\text{eje mayor})$

Donde:

θ corresponde al ángulo de impacto.

El eje menor representa la anchura de la elipse.

El eje mayor representa la longitud máxima de la mancha.

Cuando ambos ejes presentan valores similares, la mancha tiende a ser circular, indicando impactos cercanos a 90°. Por el contrario, mientras mayor sea la elongación de la elipse, menor será el ángulo de incidencia de la gota (Miller, 2012).

Determinación del punto de convergencia bidimensional (2D)

Posteriormente, se realizó la reconstrucción bidimensional de las trayectorias hemáticas a objeto de determinar el punto de convergencia. Para ello, se identificó la direccionalidad de cada mancha considerando la elongación de la elipse y la presencia de espículas orientadas en sentido del desplazamiento.

A partir del eje longitudinal de cada mancha se proyectaron líneas rectas en sentido inverso al desplazamiento de la gota utilizando hilo de nylon fluorescente y puntero láser. La intersección de múltiples trayectorias permitió establecer el punto de convergencia bidimensional, correspondiente al punto aproximado desde donde se originaron las proyecciones hemáticas en el plano horizontal (James, Kish & Sutton, 2005).

El punto de convergencia no se determinó a partir de una sola mancha, sino mediante la integración de múltiples trayectorias, permitiendo reducir errores individuales y aumentar la precisión reconstructiva.

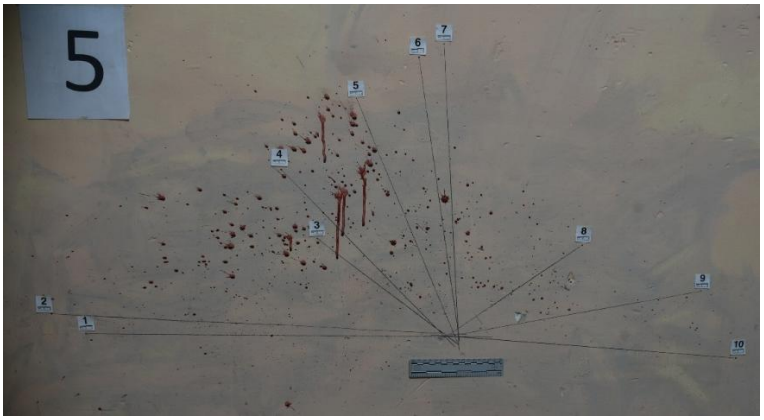


Figura 4. Reconstrucción bidimensional de trayectorias hemáticas para la determinación del punto de convergencia. Elaboración propia

Determinación del área de origen tridimensional (3D)

Una vez determinada el punto de convergencia en el plano bidimensional, se procedió a calcular la altura correspondiente al punto de origen de las manchas en el espacio tridimensional.

Para ello, se realizó la medición de la distancia horizontal existente entre cada mancha analizada y el punto de convergencia previamente establecida. Esta distancia fue considerada como el cateto adyacente de un triángulo rectángulo reconstructivo, mientras que el ángulo de impacto calculado constituyó el ángulo interno del triángulo.

La determinación de la altura se realizó aplicando la función tangente:

$h=d.\tan(\theta)$

Donde:

h representa la altura del punto de origen.

d corresponde a la distancia horizontal entre la mancha y el punto de convergencia.

θ corresponde al ángulo de impacto previamente calculado.

El procedimiento fue repetido individualmente para las diez manchas seleccionadas en cada ensayo. Finalmente, se obtuvo un promedio general de las alturas calculadas, permitiendo determinar el área de origen tridimensional de las proyecciones hemáticas (Wonder, 2011).

Estrategia de análisis de información

La estrategia de análisis consistió en comparar los valores promedio obtenidos en cada uno de los soportes estudiados, evaluando la existencia o ausencia de dispersión significativa entre los resultados reconstructivos. Asimismo, se analizó la repetibilidad del método trigonométrico como criterio de validación científica y precisión pericial.

Los resultados fueron organizados mediante tablas comparativas y análisis descriptivos orientados a establecer el comportamiento reconstructivo de las manchas de sangre frente a distintas condiciones de textura, rugosidad y porosidad superficial.

Resultados y discusión

La presente investigación tuvo como finalidad evaluar comparativamente la influencia de distintos tipos de soporte en la determinación del punto de origen y punto de convergencia de manchas de sangre producidas por salpicadura mediante el método trigonométrico. Los resultados obtenidos permitieron establecer que las variaciones generadas por las superficies analizadas no afectan significativamente la precisión reconstructiva del método empleado.

Resultados experimentales

Los ensayos realizados sobre pared pintada, ladrillo y cerámica permitieron obtener los siguientes resultados promedio en la determinación del punto de origen:

Tabla 1

Determinación del punto de origen de manchas de sangre en distintos tipos de soporte

Ensayo	Pintura (cm)	Ladrillo (cm)	Cerámica (cm)
1	43,4848	45,5146	53,5360
2	47,3655	50,7813	52,2481
3	45,0873	50,6201	52,2481
4	46,5732	52,9219	55,0177
5	48,1809	48,7576	53,4105
6	49,8664	51,5039	54,8270
7	52,6121	52,6121	53,0311
8	45,1113	51,4677	53,7646
9	46,4938	48,8596	54,6751
10	46,1365	47,4784	51,0534
Promedio	**47,09118**	**50,05172**	**53,38116**

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados evidencian que, tomando como referencia la distancia experimental inicial de 50 cm establecida durante el procedimiento, las variaciones obtenidas en los distintos soportes fueron mínimas, manteniéndose dentro de un rango aproximado de ±3 cm respecto a la distancia real de producción de las manchas.

En la pared pintada se obtuvo un promedio de 47,09 cm, representando una diferencia aproximada de −3 cm respecto a la distancia experimental. En el soporte de ladrillo el promedio alcanzó 50,05 cm, mostrando prácticamente coincidencia exacta con la medida real. Finalmente, la superficie de cerámica presentó un promedio de 53,38 cm, correspondiente a una variación aproximada de +3 cm.

Análisis reconstructivo de los resultados

Los hallazgos obtenidos demuestran que las diferencias de textura, rugosidad y porosidad entre las superficies analizadas no producen alteraciones significativas en la determinación del punto de origen cuando se aplica el método trigonométrico. A pesar de que las características físicas de los soportes modifican parcialmente los bordes periféricos y la absorción de las manchas, la geometría general de la elipse se conserva suficientemente estable para permitir la determinación del ángulo de impacto y la reconstrucción espacial de las trayectorias hemáticas.

Estos resultados guardan relación con lo expuesto por Bevel y Gardner (2008), quienes sostienen que el análisis geométrico de las manchas de sangre mantiene validez reconstructiva siempre que las manchas conserven adecuadamente sus dimensiones principales y no presenten deformaciones extremas. De igual manera, MacDonell (1997) refiere que la forma elíptica constituye un elemento matemáticamente confiable para la determinación del ángulo de incidencia en manchas proyectadas.

Desde el punto de vista físico, la explicación de esta estabilidad reconstructiva radica en que la sangre, al comportarse como un fluido viscoso bajo principios de dinámica de fluidos, mantiene patrones relativamente predecibles de deformación durante el impacto sobre superficies sólidas (Attinger et al., 2013). Aunque las superficies rugosas pueden producir bordes irregulares o espículas adicionales, la relación proporcional entre eje mayor y eje menor tiende a conservarse, permitiendo que el cálculo trigonométrico continúe siendo funcional.

Validación del método trigonométrico

Uno de los hallazgos más relevantes de la investigación corresponde a la repetibilidad de los resultados obtenidos. Los diez ensayos realizados en cada soporte evidenciaron baja dispersión entre los valores registrados, lo cual fortalece la confiabilidad y reproducibilidad del método empleado.

La repetibilidad constituye un criterio fundamental de validación científica en criminalística, debido a que permite demostrar que un procedimiento genera resultados consistentes bajo condiciones similares (Wonder, 2011). En este sentido, el método trigonométrico aplicado al análisis de manchas de sangre presenta ventajas importantes frente a métodos empíricos tradicionales como el acordonado, los cuales dependen en mayor medida de la apreciación subjetiva del examinador.

Asimismo, la integración de principios matemáticos dentro del análisis reconstructivo permite reducir los márgenes de error interpretativo y aumentar la objetividad del dictamen pericial. Tal como señalan James, Kish y Sutton (2005), la aplicación de modelos geométricos y trigonométricos en BPA transforma la reconstrucción criminalística en un proceso cuantificable y científicamente verificable.

Implicancias criminalísticas

Desde una perspectiva aplicada, los resultados obtenidos poseen relevancia directa para la criminalística de campo y la biología forense. La investigación demuestra que el método trigonométrico puede ser aplicado en distintos tipos de superficies comúnmente presentes en escenas del crimen sin que exista pérdida significativa de precisión reconstructiva.

Esto permite fortalecer técnicamente la determinación de:

posiciones relativas entre víctima y agresor,

direccionalidad de eventos,

trayectorias de desplazamiento,

áreas de origen de las proyecciones hemáticas,

y reconstrucción de mecanismos de producción de lesiones.

Además, los resultados permitieron estructurar un protocolo técnico de aplicación pericial orientado a la estandarización del análisis reconstructivo de manchas de sangre, contribuyendo al fortalecimiento científico de la criminalística aplicada en Bolivia.

Discusión

Los resultados obtenidos permiten sostener que el método trigonométrico presenta adecuada exactitud y repetibilidad para la determinación del punto de convergencia y área de origen de manchas de sangre producidas por salpicadura. La ausencia de dispersión significativa entre los distintos soportes demuestra que las propiedades geométricas esenciales de las manchas se conservan aun cuando existan diferencias moderadas de textura y rugosidad superficial.

Desde el punto de vista reconstructivo, estos hallazgos fortalecen la validez científica del análisis de patrones de manchas de sangre como herramienta pericial orientada a la reconstrucción de hechos violentos. Asimismo, permiten evidenciar que la aplicación de principios físicos y matemáticos reduce considerablemente la subjetividad en la interpretación criminalística.

No obstante, el estudio presenta limitaciones relacionadas con la evaluación exclusiva de superficies de cerámica, ladrillo y pared pintada bajo condiciones controladas de laboratorio. En este sentido, sería recomendable desarrollar futuras investigaciones sobre otros tipos de soporte comúnmente encontrados en escenarios reales en Bolivia, particularmente superficies de adobe, tierra compactada o materiales rústicos, debido a que sus características de absorción, porosidad irregular y deformación superficial podrían alterar significativamente la morfología final de las manchas y afectar la precisión reconstructiva.

De igual manera, existen otras variables que potencialmente podrían influir en la determinación del punto de origen, entre ellas la viscosidad de la sangre, volumen de las gotas, velocidad de proyección, ángulo de impacto, presencia de superficies absorbentes, humedad ambiental, temperatura, corrientes de aire y deformaciones secundarias producidas por interacción con obstáculos o superficies irregulares (Attinger et al., 2013).

A pesar de estas limitaciones, los resultados obtenidos constituyen una base científica importante para la validación y futura estandarización de protocolos reconstructivos aplicados al análisis de patrones de manchas de sangre en criminalística de campo.

Conclusiones

La presente investigación permitió demostrar que el método trigonométrico constituye una herramienta científica válida, precisa y reproducible para la determinación del punto de convergencia y área de origen de patrones de manchas de sangre producidas por salpicadura. A partir de la aplicación de principios físicos, geométricos y matemáticos fue posible reconstruir espacialmente la trayectoria de las proyecciones hemáticas, fortaleciendo el valor reconstructivo del análisis de patrones de manchas de sangre dentro de la criminalística contemporánea.

Los resultados experimentales evidenciaron que los distintos tipos de soporte analizados —pared pintada, ladrillo y cerámica— no produjeron variaciones significativas en la determinación reconstructiva del punto de origen. Considerando una distancia experimental de referencia de 50 cm, las diferencias registradas entre los distintos soportes se mantuvieron dentro de un rango aproximado de ±3 cm, sin presentar dispersión relevante entre los datos obtenidos. Estos hallazgos permiten establecer que las propiedades geométricas esenciales de las manchas conservan estabilidad suficiente para la aplicación del método trigonométrico aun en superficies con diferencias moderadas de textura y rugosidad.

Asimismo, la investigación permitió confirmar que la determinación del ángulo de impacto mediante la relación entre el eje mayor y eje menor de las manchas constituye un procedimiento técnicamente confiable para la reconstrucción bidimensional y tridimensional de trayectorias hemáticas. La repetibilidad observada en los distintos ensayos refuerza la validez científica del método y su aplicabilidad dentro de procedimientos periciales orientados a la reconstrucción de hechos violentos.

Desde el punto de vista criminalístico, el estudio aporta una base metodológica orientada a la futura estandarización de protocolos reconstructivos para el análisis de patrones de manchas de sangre en Bolivia. La aplicación de procedimientos cuantificables y verificables contribuye

además a reducir la subjetividad interpretativa en el análisis pericial, fortaleciendo la objetividad y defendibilidad técnica de los informes periciales.

No obstante, considerando las limitaciones del estudio, se recomienda el desarrollo de futuras investigaciones sobre otros tipos de soporte que podrían generar mayores deformaciones en la morfología y dimensiones de las manchas de sangre. Particularmente, resultaría importante evaluar superficies comúnmente encontradas en escenarios reales dentro del contexto boliviano, como paredes de adobe, madera, tierra compactada, yeso rústico y materiales altamente absorbentes o irregulares. Del mismo modo, futuras investigaciones deberían considerar variables adicionales como humedad ambiental, temperatura, volumen de las gotas, velocidad de proyección y absorción diferencial de las superficies, debido a que estos factores podrían influir en la precisión reconstructiva del método trigonométrico.

Referencias bibliográficas

- Attinger, D., Moore, C., Donaldson, A., Jafari, A., & Stone, H. A. (2013). Fluid dynamics topics in bloodstain pattern analysis: Comparative review and research opportunities. *Forensic Science International, 231*(1–3), 375–396. https://doi.org/10.1016/j.forsciint.2013.04.018
- Bevel, T., & Gardner, R. M. (2008). *Bloodstain pattern analysis: With an introduction to crime scene reconstruction* (3.ª ed.). CRC Press.
- De Castro, T., & Nickson, T. (2018). *Forensic science and the law: Biological evidence and bloodstain interpretation*. Academic Press.
- Eckert, W. G., & James, S. H. (1989). *Interpretation of bloodstain evidence in criminal trials*. Elsevier Science Publishing.
- Gardner, R. M. (2012). *Practical crime scene processing and investigation* (2.ª ed.). CRC Press.
- International Association of Bloodstain Pattern Analysts [IABPA]. (2021). *Bloodstain pattern analysis standards and terminology*. IABPA Publications.
- James, S. H., Kish, P. E., & Sutton, T. P. (2005). *Principles of bloodstain pattern analysis: Theory and practice*. CRC Press.

- Lee, H. C., Palmbach, T., & Miller, M. T. (2001). *Henry Lee's crime scene handbook*. Academic Press.
- Lovatón, E. (2018). *Análisis de patrones de manchas de sangre*. Minerva Argentina.
- MacDonell, H. L. (1997). *Bloodstain patterns*. Laboratory of Forensic Science.
- Miller, M. T. (2012). *Bloodstain pattern analysis: Theory and practice*. Wiley-Blackwell.
- Scientific Working Group on Bloodstain Pattern Analysis [SWGSTAIN]. (2009). *Recommended terminology and guidelines*. U.S. Department of Justice.
- Stuart H. James, & Eckert, W. G. (1999). *Interpretation of bloodstain evidence at crime scenes* (2.ª ed.). CRC Press.
- Turvey, B. E. (2011). *Criminal profiling: An introduction to behavioral evidence analysis* (4.ª ed.). Academic Press.
- Wonder, A. Y. (2011). *Introduction to bloodstain pattern analysis*. Elsevier Academic Press.

¿PUEDE UN MISIL BALÍSTICO DE LA GUERRA FRÍA Y LA UTILIDAD MARGINAL CONVENCER A UNA HERMOSA DAMA DE IR AL CINE?

(Comunicación)

Univ. CALLISAYA CONDORI ALBERT
acallisayac2@fcpn.edu.bo

Semblanza:

Albert Callisaya Condori. Egresado de la carrera de Ingeniería Económica de la Universidad Franz Tamayo e investigador independiente, autor del artículo "Bolivia: crecimiento del PIB nominal y aumento de la oferta monetaria. ¿La apoteosis de la hiperinflación?" Actualmente estudia la carrera de Matemática en la Universidad Mayor de San Andrés. Curioso un tanto insensato, lo llevo a investigar temas relacionados con política monetaria, finanzas y, desde luego, matemáticas. Con el fin de demostrar que incluso los números más fríos pueden contar una historia interesante…

Resumen

El presente trabajo parte de una inquietud tan improbable como honesta: ¿es posible diseñar una estrategia, basada en modelos matemáticos, que aumente la probabilidad de que una invitación al cine sea aceptada? El objetivo principal es construir un modelo que, apoyado en herramientas de la matemática y la economía, permita comprender —y quizás influir— en decisiones humanas atravesadas por la incertidumbre, la percepción y la emoción.

La metodología se fundamenta en la utilización de la distribución beta y la ley de la utilidad marginal, integradas mediante analogías y referencias históricas, como el desarrollo del misil Polaris y las redes PERT. A través de estas herramientas, se modela una estrategia de interacción cuyo desarrollo busca capturar el comportamiento dinámico de la satisfacción y sus límites.

Los resultados indican que es posible alcanzar una probabilidad del 34,46% de aceptación, identificando además un punto de saturación a partir del cual insistir genera efectos adversos. La aplicación práctica de la estrategia no solo valida la lógica interna del modelo, sino que conduce a un resultado favorable, superando incluso las expectativas iniciales.

En el debate, se reconoce que los modelos matemáticos encuentran límites al enfrentarse a la complejidad de la acción humana. Sin embargo, este trabajo propone algo distinto: no solo explicar la realidad, sino interactuar con ella. Porque, a veces, entre números y un poco de fe, también puede haber lugar para lo inesperado…

Palabras clave

Distribución beta, utilidad marginal, modelización matemática, probabilidad.

1. Introducción: No estoy soltero porque soy feo, es culpa de la paradoja…

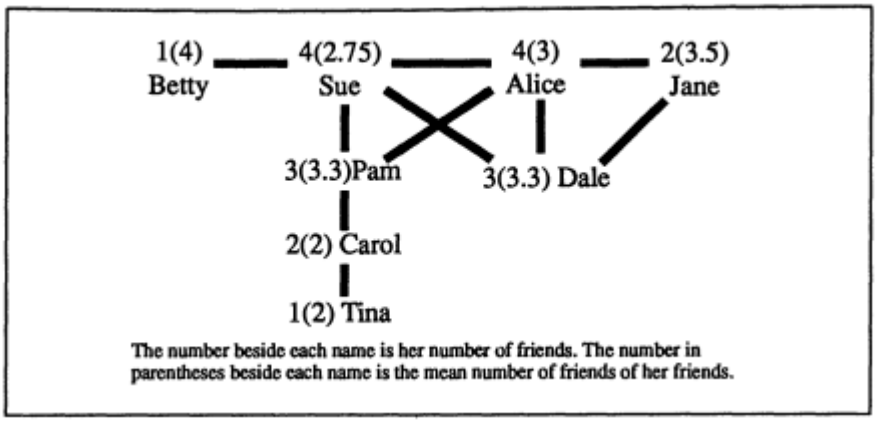
En el terreno de las probabilidades, las chances de que una hermosa y distinguida dama pase por alto o rechace mis invitaciones para probar mi sazón en un almuerzo de 3 tiempos, ir al cine a ver películas de Marvel, jugar league of legends o charlar sobre matemáticas son altamente mayores a que las acepte. Por varios motivos. No soy alguien interesante. No soy encantador. No soy apuesto. Quizá por esto último es que nunca tuve una novia. Mi presencia siempre suele pasar inadvertida para las chicas. Soy invisible. Cuando consulto a mis amigas, dicen que soy un chico "regular" y me califican con un 6/10, no lo dicen de manera peyorativa, pero insisten en que mi situación mejoraría si tuviera más vida social y dejara de ser "marido bueno" – porque no salgo a ningún lado –.

Hay muchos peces en el mar, dice una conocida frase que normalmente se aplica en el ámbito de las relaciones personales, sin embargo, desde mi perspectiva yo creo que "conquistar" está sobrevalorado. Y no se lo vayan a tomar a mal, pero es porque todo el mundo "conquista" más que yo, que tú, que nosotros. Lo siento, pero a veces es bueno ver las cosas con un poco de humildad, y esto último ya no es una opinión mía, es más, es un teorema muy curioso y sorprendente dentro del campo de estudio de la economía y la sociología, 2 de las 6 ciencias sociales.

Este teorema bautizado como *"la paradoja de la amistad"* por el sociólogo matemático Scott Feld en 1991, plantea que la mayoría de la gente tiene menos amigos en promedio que sus amigos. Para entender de que exactamente trata lo que propone el autor de esta paradoja, es necesario conocer un poco sobre teoría de grafos. Un grafo es un conjunto de entidades que generalmente son representados por puntos a los cuales se conocen como nodos, cuya característica es que cada nodo tiene al menos una relación con otro que se puede representar con una línea que los une y, una vez modelado este grafo, se conoce con el nombre de redes complejas.

Es por eso que una relación de amistad, es una relación simétrica ya que ambos individuos se consideran amigos de forma mutua, por tanto, esta relación se puede graficar y explicar mediante grafos (Feld, 1991). Es por eso que el profesor Feld toma el trabajo *The Adolescent Society* de (Coleman, 1963), donde recopilo datos sobre las amistades entre los estudiantes de 12 escuelas secundarias. Se pidió a los individuos que nombraran a sus amigos, siendo las parejas de individuos que se nombraron unos a otros a los que se les prestó especial atención. Son estas "amistades" las que utiliza el profesor Feld para construir la paradoja.

Gráfico 1: Relación de amistad de 8 chicas de la secundaria Marketville



Fuente: Why Your Friends Have More Friends Than You Do? (Feld, 1991)

En este ejemplo, la única amiga de Betty, Sue, tiene más amigos que Betty; Las dos amigas de Jane, Dale y Alice, tienen en promedio más amigas que Jane. Las tres amigas de Dale, Sue, Alice y Jane, tienen en promedio más amigas que Dale. De las ocho niñas, cinco (Betty, Jane, Pam, Dale, y Tina) tienen menos amigas que el promedio entre sus amigos, mientras que solo dos

(Sue y Alice) tienen más amigas que el promedio de sus amigas; una (Carol) tiene tantos como el promedio de sus amigas (Feld, 1991).

Tabla 1: Numero de amigas, número total de amigas de sus amigas y media de amigas de sus amigas del gráfico 1

	Number of Friends (x_i)	Total Number of Friends of Her Friends (Σx_j)	Mean Number of Friends of Her Friends ($\Sigma x_j/x_i$)
Betty.....	1	4	4
Sue.....	4	11	2.75
Alice.....	4	12	3
Jane.....	2	7	3.5
Pam.....	3	10	3.3
Dale.....	3	10	3.3
Carol.....	2	4	2
Tina.....	1	2	2
Total.....	20	60	23.92
Mean	2.5*	3†	2.99*

Fuente: Why Your Friends Have More Friends Than You Do? (Feld, 1991)

En el trabajo de (Coleman, 1963), de las 146 chicas que participaron, 80 estaban por debajo de la media de sus amigas, 41 por encima y 25 tenían tantas amigas como la media. O sea, que, en el conjunto general, el número de estudiantes con menos amigas que la media de sus amigas era casi el doble que el de estudiantes con más amigas que la media. Esta situación, *a priori,* aparenta ser una interesante – en mi caso deprimente – casualidad, pero no, esta es una situación que está presente en todas las redes complejas sociales y, a diferencia de la década de los 60's, ahora resulta fácilmente comprobable gracias a las RRSS, dejando de lado la necesidad de realizar laboriosas encuestas.

Sin embargo, los efectos de la paradoja de la amistad expuestos por el profesor Feld van más allá de la soltería de un estudiante de matemáticas, estos efectos pueden aplicarse a la epidemiología, informática, microbiología, marketing, incluso hasta los sistemas de votación y desde luego a la economía. Incluso los científicos y mentes más prominentes utilizan estas redes complejas para conocer el alcance y difusión de sus investigaciones y/o aportes académicos. Como por ejemplo el trabajo de (Subieta & Ramírez, 2019), donde realizaron un

análisis bibliométrico de la Revista Boliviana de Física para conocer su influencia con los distintos países de las instituciones con las cuales colaboran para realizar sus publicaciones.

Por tanto, si desde el principio ya tengo una importante desventaja debido a la paradoja de la amistad (al margen de mis otras desventajas y limitaciones) ¿Existirá alguna forma de que una hermosa y distinguida dama acepte mi invitación de ir al cine? Pues, la única forma de averiguarlo sería averiguándolo, ósea, acercarme y de manera cordial presentarme para luego invitarla al cine. No obstante, Lee Bolman, profesor de la universidad de Yale y autor de varios libros sobre liderazgo afirma: *"Toda visión sin tener una estrategia sigue siendo una ilusión".*

Es por eso que, como principal objetivo, se debe elaborar una estrategia para conocer a la hermosa dama y al menos aumentar la posibilidad de que acepte mi invitación para ir al cine.

2. Paso 1: Hacer un Modelo para Conocer a la "Modelo"

Ella es realmente hermosa. Lleva su brillante pelo a mitad de la espalda, aunque a veces lo tenga recogido. Tiene el porte de una princesa, pero, estando seria, irradia la autoridad de una reina. Hay historias que se sienten incompletas por no haberse contado con su dulce voz, y canciones que morirían por escucharla a ella. Es ternura, inocencia y belleza en una sola.

Una vez identificado al sujeto de estudio, como punto de partida para elaborar el modelo se considerará a la distribución beta y a la ley de la utilidad marginal, para especificar la variación en la proporción o porcentaje en función de la utilidad marginal de la bella modelo conforme se vaya desarrollando la estrategia para poder ir al cine con ella. Sin embargo, antes de elaborar la estrategia es necesario conocer sus componentes.

2.1 El UGM – 27 Polaris y la Distribución Beta

El escritor británico Eric Arthur Blair, mejor conocido como *George Orwell,* fue el primero en utilizar el término "guerra fría" el año 1945 en su ensayo *You and the Atomic Bomb* (La bomba atómica y tú) para hacer referencia a las predicciones de un mundo polarizado entre los bloques occidental y oriental a la cabeza de EE UU y la Unión Soviética respectivamente. Sin embargo, no vivió para comprobar lo acertadas que estaban sus expectativas a futuro, que

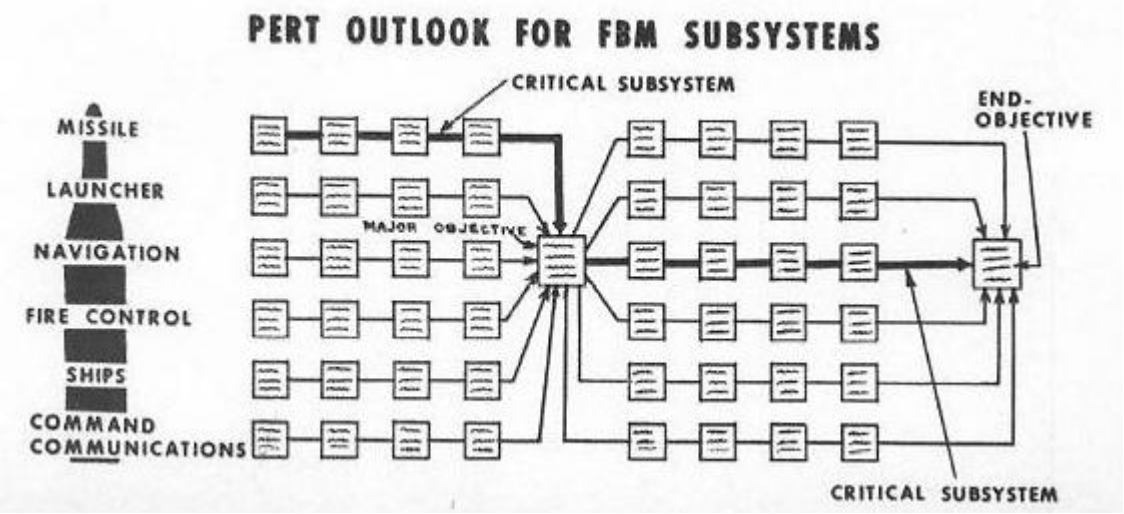
tan solo a 10 años de su fallecimiento, en la década de los 60's el mundo vivía bajo la incertidumbre de una guerra nuclear debido a la intensa carrera armamentista nuclear entre ambos bloques. Incluso 30 años después, la conocida banda de trash metal Megadeth hizo una canción llamada *Rust in peace... Polaris* que habla sobre uno de los misiles nucleares que se desarrollaron en esa década.

El misil UGM – 27 Polaris fue el primer SLBM[1] de la Armada de EE UU en operación desde el año 1960 hasta el año 1996[2], fue diseñado ante la necesidad de sustituir los misiles de crucero por unos que puedan ser lanzados desde un submarino, teniendo en cuenta los problemas políticos y diplomáticos que puede acarrear una base militar con misiles nucleares de corto alcance en países aliados cercanos al objetivo, tal y como lo puso de manifiesto la Unión Soviética con las crisis de los misiles en Cuba. Lo sorprendente del misil UGM – 27 Polaris no solamente yace en su autonomía de 1000 millas náuticas (1853 km) y la capacidad destructiva de los 600 kT de su ojiva, lo sorprendente de este misil también yace en el proyecto con el cual fue desarrollado, conocido con el nombre de "*Proyecto Polaris*".

Diseñar un misil con esas características capaz de ser lanzado desde un submarino sumergido y, que además pueda alcanzar objetivos a larga distancia con precisión, requiere controlar y más que todo coordinar a más de 250 empresas, 9.000 subcontratistas y a todos los burócratas de las diferentes agencias gubernamentales implicadas. A todo lo anteriormente mencionado, también hay que añadir la variable tiempo, puesto que, el lanzamiento del Sputnik 1 por parte de la Unión Soviética el 4 de octubre de 1957 supuso la necesidad de acortar los plazos para los avances del proyecto. Parte de la solución a estos problemas apareció en 1958 con la aplicación de la Técnica de Revisión y Evaluación de Programas, en inglés Program Evaluation and Review Technique (PERT), desarrollada por la Oficina de Proyectos Especiales junto con la Booz Allen Hamilton (ingenieros consultores del proyecto) y la Lockheed Missiles and Space Company (ahora Lockheed Martin), contratista principal del Polaris (Oliveira , 2021).

[1] Submarine-Launched Ballistic Missile o Misil Balístico Lanzado desde un Submarino por su traducción al español.
[2] A lo largo de esos años, tuvo variantes como la A-1, A-2, A-3 y Chevaline, siendo esta última la variante británica con capacidad de penetrar la Red Antimisiles de Defensa (ABM) (Weapons, 2002)

Gráfico 2: Perspectiva de las redes PERT y la ruta crítica CPM del proyecto Polaris



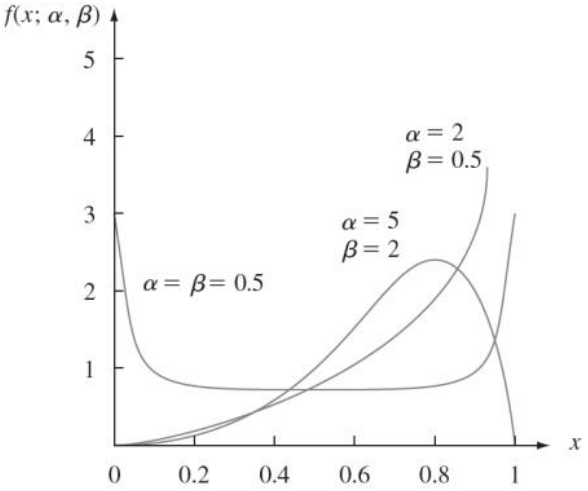
Fuente: SP Plus PERT Gave Polaris its Spurt (Pages, 1960)

Por otra parte, para coordinar las actividades de las redes PERT que conforman el proyecto Polaris fue necesario recurrir a la distribución beta, ya que, la suposición estándar en el análisis PERT es que el tiempo necesario para completar cualquier actividad particular, una vez que se haya iniciado, tiene una distribución Beta con α = tiempo optimista (Si todo va bien) y β = tiempo pesimista (Si todo sale mal), es por eso que la distribución beta estándar se utiliza comúnmente para modelar la variación proporcional de una cantidad que ocurre en diferentes muestras (Devore, 2012), siendo las diferentes etapas del desarrollo del proyecto Polaris un claro ejemplo de ello.

Las características de la distribución beta son:

- ✓ La distribución beta es una familia de distribuciones de probabilidad continúa definidas en el intervalo (0,1) con dos parámetros positivos que determinan la forma, típicamente notados como α y β.
- ✓ La distribución beta puede tomar muchas formas según los valores de α y β.
- ✓ Generalmente es utilizada cuando no existen datos históricos sólidos en los cuales basar la estimación de las actividades. Se emplea para las variables aleatorias continuas que no son negativas.

Gráfico 3: Funciones de densidad de probabilidad beta estándar



Fuente: Probabilidad y estadística para ciencias e ingeniería (Devore, 2012)

El grafico 3 ilustra varias funciones de densidad de probabilidad beta estándar. Las gráficas de la función de densidad de probabilidad son similares, excepto que están desplazadas y luego alargadas o comprimidas para ajustarse al intervalo (A,B)[3]. A menos que α y β sean enteros, la integración de la función de densidad de probabilidad para calcular probabilidades es difícil. Sin embargo, recurrir a valores que no son enteros permite una mayor aproximación del modelo y con ello una mayor exactitud en el cálculo de la probabilidad (Devore, 2012). La distribución beta toma la siguiente forma:

$$P(x) = \frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)} \int_0^{A,B} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

Donde:

- $\gamma(n)$ es la función gamma[4] denotado por la integral $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$
- $\alpha\ y\ \beta$ son los parámetros que definirán densidad de probabilidad de la función beta.
- La media está definida por: $\bar{x} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- La varianza está definida por: $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

[3] Intervalo en el eje de las abscisas o eje X, intervalo que está dentro de los puntos (0,1)

[4] Es una función que da como resultado $\gamma(n) = (n-1)!$, factorial que se extiende a los números reales y a los números complejos con parte entera positiva.

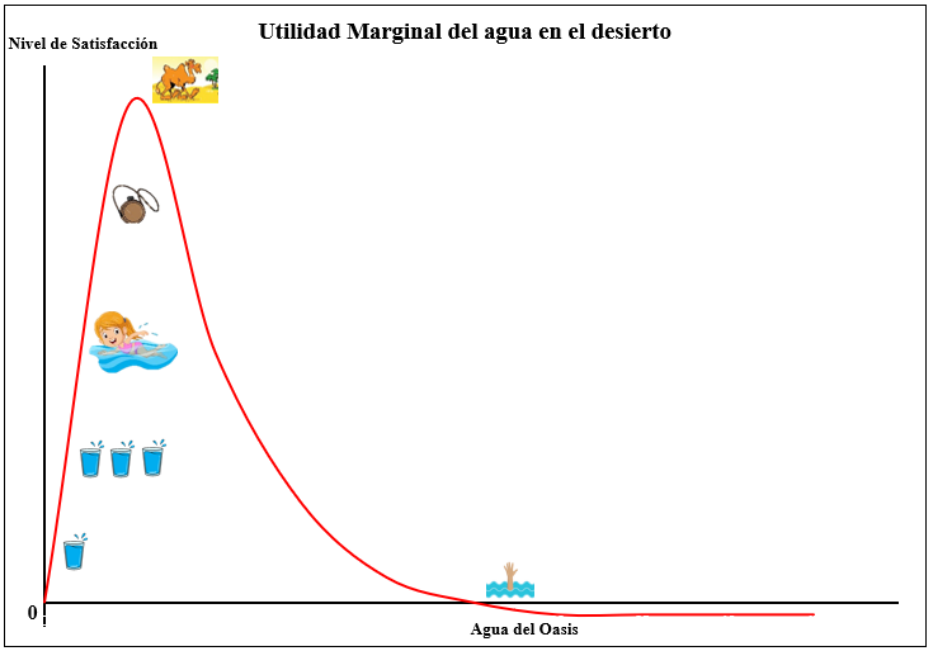
2.2 La ley de la Utilidad Marginal

"Los economistas denominan utilidad a la satisfacción que obtiene un consumidor del consumo de mercancías. Supóngase que un consumidor come cinco naranjas. La satisfacción total que obtiene de esto se conoce como la utilidad total. Supóngase que ahora consuma una naranja adicional. La satisfacción adicional que obtiene de consumir esta naranja se conoce como la utilidad marginal de la sexta naranja." (Maddala & Miller, 1996, pág. 88)

Ahora, suponga que se encuentra perdido en medio del desierto, la necesidad urgente de ese momento es encontrar agua para saciar su cada vez más agobiante sed. Sin embargo, tiene la fortuna de encontrar un oasis, bebiendo un vaso de agua del oasis seguiría insatisfecho, quizá se encuentre satisfecho después de 3 vasos de agua, y lo estaría más si entrara al oasis para refrescarse del calor sofocante del desierto, y lo estaría aún más si limpiara la arena de su ropa lavándola en el oasis, y lo estaría mucho más aún si llenara las cantimploras que lleva consigo, y lo estaría muchísimo más cuando le diera agua a su camello. Si no hay otra necesidad, es en este punto donde ya no necesita más agua (al menos por ese momento), ese punto se conoce como el punto de saturación.

Sin embargo, ¿qué pasaría si usted consumiese un vaso adicional de agua? Pues me imagino que, en lugar de seguir satisfaciéndolo, le causaría cierta insatisfacción, ¿y con otro vaso? La situación empezaría a preocuparlo, porque llegaría el momento en el que dado cierta cantidad de agua adicional que podría llegar a ahogarlo. Es por eso que, después del punto de saturación la utilidad marginal empieza a decrecer.

Gráfico 4: Ejemplo de utilidad marginal



Fuente: Elaboración propia

Como se puede observar, la utilidad marginal sigue un principio. "*Principio según el cual cuanto más se consume de un bien, menos aumenta la utilidad con el consumo de cantidades adicionales* (Pindyck & Rubinfeld, 2009)". Por tanto, el punto de saturación, es el punto máximo de utilidad o satisfacción que se puede obtener con las unidades adicionales de un bien.

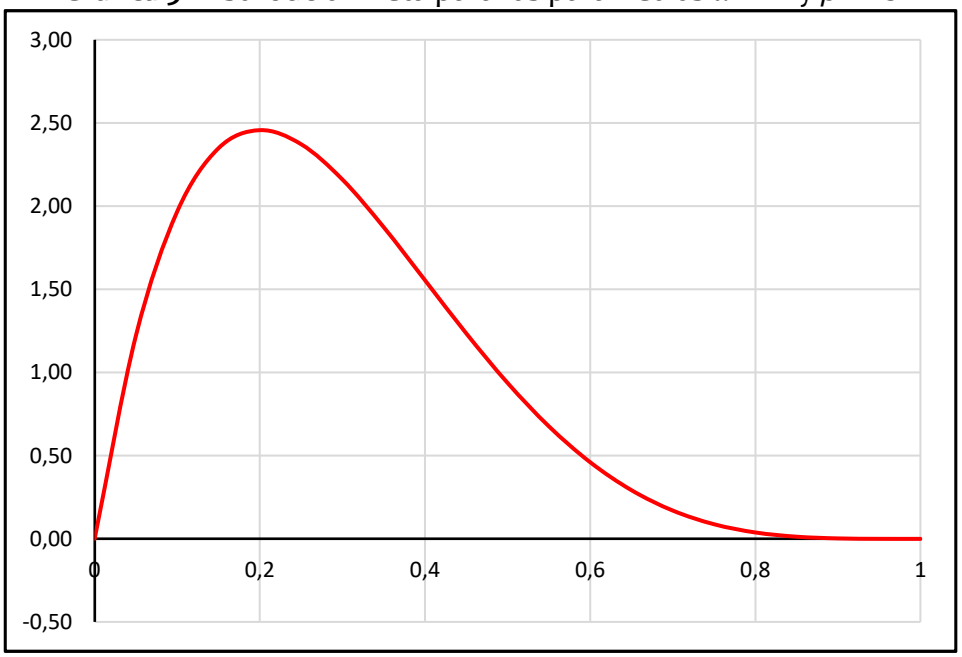
2.3 34,46% de Probabilidad, 65,54% de Fe

Antes de comenzar a elaborar el modelo, es necesario determinar los parámetros α y β que darán forma a la distribución beta, para ello se recurrió a la función DISTR.BETA.N del programa Microsoft Excel para realizar distintas combinaciones hasta encontrar los parámetros que satisfagan el comportamiento de la ley de la utilidad marginal.

Tabla 2: Distribución Beta para los parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 5$

x	$\alpha = 2, \beta = 5$
0	0,00
0,05	1,22
0,1	1,97
0,15	2,35
0,2	2,46
0,25	2,37
0,3	2,16
0,35	1,87
0,4	1,56
0,45	1,24
0,5	0,94
0,55	0,68
0,6	0,46
0,65	0,29
0,7	0,17
0,75	0,09
0,8	0,04
0,85	0,01
0,9	0,00
0,95	0,00
1	0,00

Gráfica 5: Distribución Beta para los parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 5$



Fuente: Elaboración propia con el programa Microsoft Excel

Una vez obtenido los parámetros α y β se puede despejar la función gamma y obtener la distribución beta:

$$P(x) = \frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\gamma(\alpha)\gamma(\beta)} = \frac{\gamma(2+5)}{\gamma(2)\gamma(5)} = \frac{\gamma(7)}{\gamma(2)\gamma(5)} = \frac{6!}{1!\,4!} = 30$$
$$P(x) = 30\left(x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right) = 30(x^{2-1}(1-x)^{5-1})$$
$$P(x) = 30x(1-x)^4$$

Para obtener el límite superior de la integral, hay que tener en cuenta el punto de saturación de la función de la utilidad marginal, punto máximo de satisfacción que garantizaría que la hermosa modelo acepte ir conmigo al cine. Para determinar dicho punto, solo basta con derivar la función e igualar a 0.

$$f(x) = 30x(1-x)^4$$
$$f'(x) = 30(1-x)^4 - 120x(1-x)^3$$

Igualando a 0:

$$30(1-x)^4 - 120x(1-x)^3 = 0$$
$$150x^4 - 480x^3 + 540x^2 - 240x + 30 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad x_2 = 1$$

Siendo el termino $x_1 = 0{,}2$ el punto de saturación de la utilidad marginal, el punto máximo de satisfacción, que justamente es el mayor valor obtenido en la Tabla 2. Por tanto, ¿cuál es la probabilidad de la que bellísima modelo acepte ir conmigo al cine?

$$P(x) = \int_0^{0,2} 30x(1-x)^4$$
$$P\left(x_{0,2-0}\right) = 30\left(\frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)$$
$$P(x) = 0{,}3446$$

Algo que es aparentemente alentador, ya que mis probabilidades pasaron de 0 a 34,46%. Sin embargo, ¿que implicaría que mi probabilidad sea al menos del 51%? Para tener un análisis más completo, es necesario determinar el límite superior de la integral, pero, al tratarse de una función de grado superior a 2, se recurrirá al método de Newton – Rapshon.

El método de Newton – Rapshon consiste en el siguiente algoritmo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde *n* es una aproximación del resultado que se desea obtener para luego ir iterando hasta encontrar el termino $n + 1$ que satisfaga el resultado de la función. Como la función que determina la probabilidad de que la hermosa modelo acepte ir al cine es conocida: $30\left(\frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) = 0{,}51$, solo falta encontrar una aproximación del limite superior de la integral, por ejemplo 0,255 por ser la mitad de 0,51.

$$x_{n+1} = 0{,}255 - \frac{30\left(\frac{x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) - 0{,}51}{30x(1-x)^4}$$

Tabla 3: Iteraciones del Método Newton – Rapshon

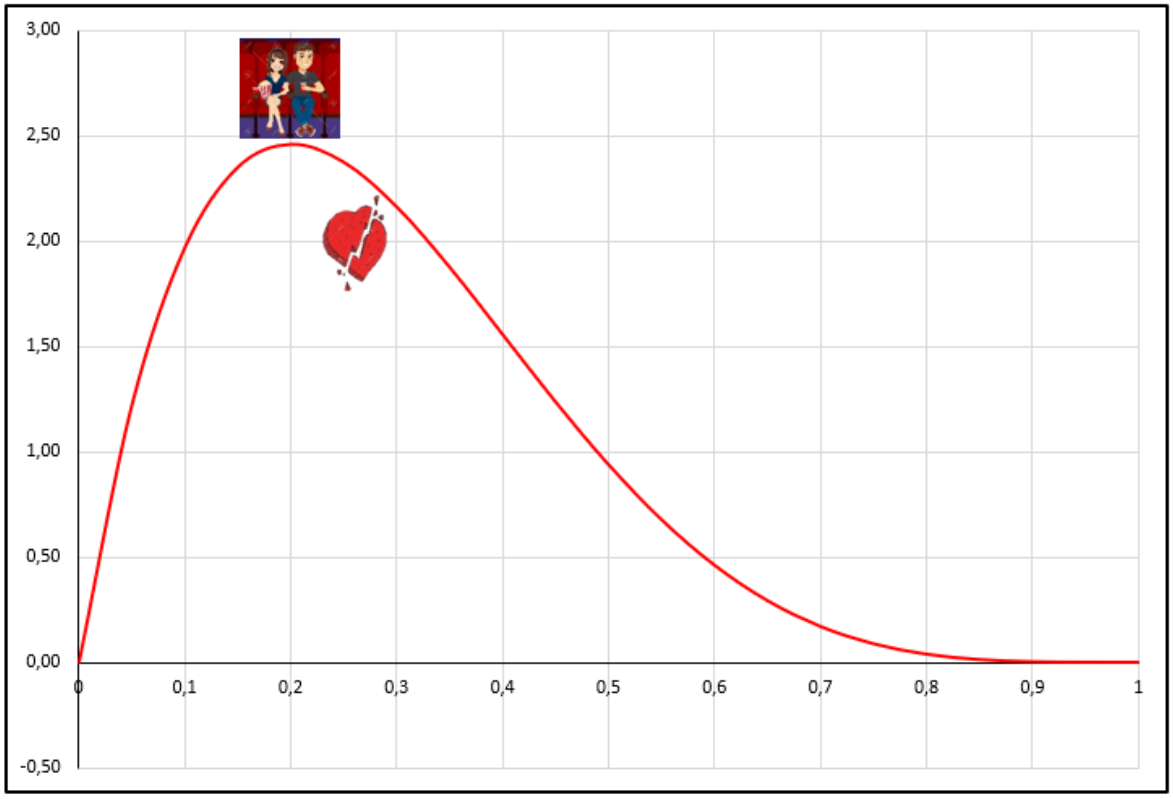
x_n	x_{n+1}	x
0,255	0,268626	0,4779
0,268626	0,268772	0,5097
0,268772	0,268772	0,51000039

Fuente: Elaboración propia con el programa Microsoft Excel

Si bien un 51% de probabilidad es mayor a 34,46%, esto no significa que la hermosa modelo vaya a aceptar ir al cine conmigo, al contrario, el límite superior de la integral se encuentra más a la derecha del punto de saturación de la utilidad marginal. Ósea, que ese 51% es la probabilidad de que ya empiece a parecerle una persona molesta, causándole una pésima primera impresión, ya que los puntos más allá de 0,2 son los puntos en donde el nivel de satisfacción empieza a decrecer, tal como se puede observar en el grafico 6.

En pocas palabras, existe un 51% de probabilidad de que no solamente rechace mi invitación, también de causarle una mala primera impresión. Algo que desde luego tiene mucha lógica, ya que ella no me conoce. Además, este es un dato muy importante para elaborar la estrategia, ya que no se deberá insistir con la invitación más de 1 vez, esa primera y única vez será para quedar el día y la hora del encuentro.

Gráfica 6: Utilidad Marginal para 34,46% y 51% de probabilidad



Fuente: Elaboración propia con el programa Microsoft Excel

3. Un Máximo Local no Garantiza un Final Feliz

La estrategia es aparentemente sencilla en teoría. Solo consiste en seguir cuidadosamente aquello que, dicta el "manual", lo que debe aumentar la utilidad marginal de la interacción.

Primero, ser caballeroso. Presentarse cordialmente, inclinar ligeramente la cabeza y besar delicadamente su mano como si se tratara de una princesa salida de una novela victoriana. Ya que lo cortés, no quita lo valiente.

Luego, ser detallista. Llevarle una rosa. Porque las rosas siguen siendo peligrosamente efectivas incluso en pleno siglo XXI. Y porque existen pocas cosas más humanas que intentar resumir sentimientos complejos mediante algo tan absurdamente simple como una flor.

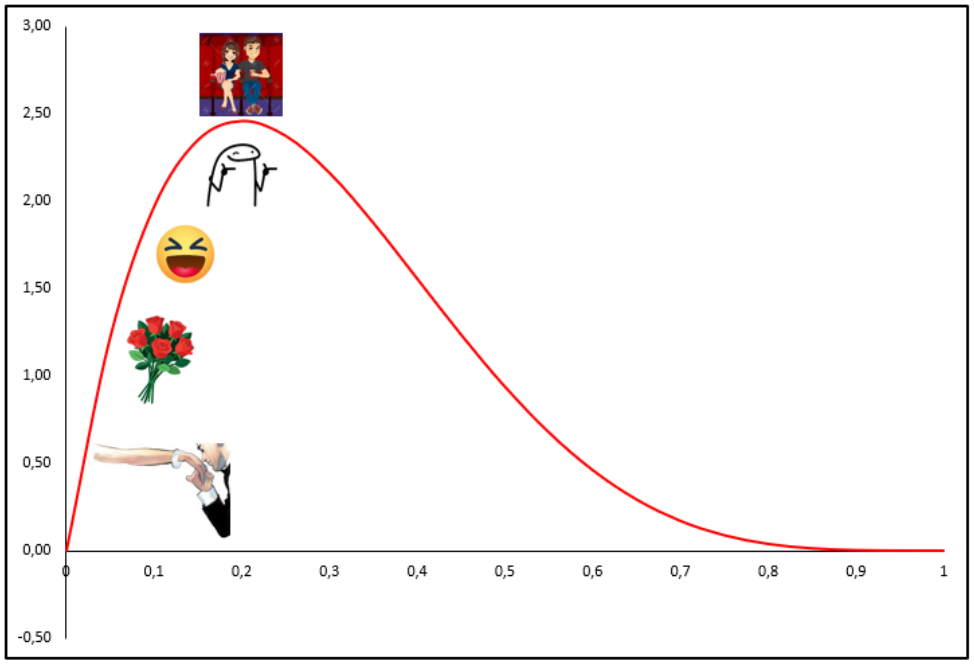
Después, hacerla reír. No con un chiste particularmente inteligente, sino con uno corto y tan innecesariamente malo que terminara cruzando accidentalmente la frontera entre lo terrible

y lo genuinamente gracioso. Porque, curiosamente, muchas veces las personas no recuerdan las conversaciones perfectas, pero sí recuerdan aquellas donde rieron sin darse cuenta.

Finalmente, ser ingenioso. Explicarle el modelo. Mostrarle las derivadas, las integrales y la distribución beta que intenta describir probabilísticamente la posibilidad de que acepte ir al cine. No solamente como una estrategia para impresionarla, sino también como una forma extraña —y quizá un poco desesperada— de demostrarle que detrás de todos esos números había alguien intentando comprender el mundo… y comprenderla a ella.

Todo esto cuidadosamente alineado dentro del modelo. Caballeroso, detallista, gracioso e ingenioso. Cada variable avanzando lentamente hacia el punto de máxima utilidad marginal.

Gráfica 7: Utilidad Marginal de la estrategia para que la bella modelo acepte ir al cine



Fuente: Elaboración propia con el programa Microsoft Excel

Los resultados obtenidos a partir de la distribución beta y la ley de la utilidad marginal muestran que existe un intervalo óptimo de interacción cuya probabilidad acumulada alcanza aproximadamente un 34,46%. Matemáticamente, este valor representa el punto donde la utilidad marginal alcanza su máximo local antes de iniciar su decrecimiento.

Sin embargo, incluso si el modelo fuese correcto desde un punto de vista formal, existe algo profundamente inquietante en ese número: el 34,46% solamente describe la parte del fenómeno que puede ser modelada.

El porcentaje restante pertenece a otra dimensión del problema. Una dimensión mucho menos dócil que las funciones continuas, las derivadas o las distribuciones de probabilidad. Pertenece al libre albedrio.

Después de cierto punto, las matemáticas dejan de describir certezas y comienzan únicamente a describir posibilidades. El modelo puede aproximar comportamientos, identificar regiones de saturación, señalar máximos relativos e incluso reducir parcialmente la incertidumbre, pero no puede penetrar completamente en aquello que hace única a una persona: sus recuerdos, sus heridas, sus miedos, sus afectos y sus decisiones.

Porque una función puede alcanzar un máximo local y aun así no conducir al resultado esperado. Y quizá ahí reside la diferencia más importante entre resolver una ecuación y querer profundamente a alguien.

En las ciencias puras y naturales, si las condiciones iniciales permanecen constantes, el sistema tiende a reproducir resultados similares. Pero en las relaciones humanas las condiciones nunca son verdaderamente constantes. Las personas cambian. Sus emociones cambian. Sus prioridades cambian. Incluso el significado de una mirada o una sonrisa puede cambiar con el tiempo.

Por eso, más allá del 34,46%, el modelo ingresa inevitablemente en una región dominada por la incertidumbre. No una incertidumbre estadística, al contrario, una incertidumbre humana.

Y aunque el presente trabajo logró modelar parcialmente la dinámica de la interacción, existe una variable imposible de parametrizar completamente: la reciprocidad emocional.

Después de todo, el sujeto de estudio no era solamente una variable aleatoria dentro del intervalo (0,1). Era quizá, la persona a quien más quise.

Y quizá esa sea también la principal limitación —y al mismo tiempo lo más bonito— de intentar aplicar matemáticas sobre el corazón humano: que incluso el modelo más elegante jamás podrá obligar a alguien a sentir lo mismo que uno siente.

4. Conclusiones y Perspectivas

- Se sustento "el problema de mi soltería" planteando que está en parte puede deberse a la paradoja de la amistad planteada por el profesor Feld el año 1991, que, sumado a mis otros inconvenientes y limitaciones, puede significar una enorme desventaja al momento de invitar a una distinguida dama al cine.
- Se dio a conocer los componentes del modelo, haciendo una breve referencia a como la distribución beta ayudo a coordinar las distintas actividades del método PERT del proyecto Polaris.
- Se elaboró una estrategia en función del modelo obtenido, con un 34,64% de probabilidad de que la bellísima modelo acepte ir al cine. Poniendo también de manifiesto las limitaciones de los modelos matemáticos respecto a la acción humana.

Fue divertido realizar este trabajo teniendo en cuenta su "peculiar" objetivo, y también fueron sorprendentes los resultados obtenidos, no obstante, hay que tener en cuenta que, la principal característica o naturaleza de los seres humanos es que son animales racionales. Utilizan su mente para mantener su vida y su bienestar. El uso de la mente, sin embargo, no es un procedimiento automático, sino que cada individuo emplea su mente de acuerdo con sus propias circunstancias. Esto hace imposible captar la naturaleza humana mediante fórmulas matemáticas, como se hace en las ciencias naturales.

Llevar a cabo un análisis cuantitativo implica la posibilidad de la asignación de números, que pueden ser sometidos a todas las operaciones de la aritmética. Para ello, es necesario definir una unidad fija objetiva. Sin embargo, tal unidad objetiva no existe en el ámbito de las valoraciones humanas. Respecto a esto, (Mises, 2015) escribió en La Acción Humana: *"En el campo de la acción humana no hay relaciones constantes y, en consecuencia, no es posible la medición"*.

Por ello, los modelos matemáticos aplicados al comportamiento humano deben interpretarse con prudencia. Un modelo puede identificar tendencias, aproximaciones o escenarios probables, pero no capturar totalmente la complejidad de las acciones humanas.

La historia ofrece múltiples ejemplos de ello. En 1992, el gobierno de Estados Unidos promovía recomendaciones nutricionales altamente respaldadas por modelos científicos y estadísticos que incentivaban el consumo masivo de cereales y carbohidratos mientras se recomendaba evitar ciertas grasas. Décadas después, nuevas evidencias cuestionaron seriamente dichas recomendaciones tras el incremento de obesidad y diabetes (CDC's Division of Diabetes Translation. United States, 2017).

Algo similar ocurrió con el uso del DDT[5] dentro de los programas de erradicación de malaria en Estados Unidos. Lo que inicialmente fue considerado una solución científica eficiente terminó revelando graves consecuencias ambientales y sanitarias años más tarde (Centers for Disease Control and Prevention, 2018).

Estos casos no demuestran que las matemáticas o la ciencia sean inútiles. Al contrario, muestran lo poderosas que pueden llegar a ser. Pero también recuerdan que incluso los modelos más sofisticados poseen límites, especialmente cuando intentan describir sistemas donde interviene la acción humana.

Después de todo, las distribuciones de probabilidad pueden aproximar posibilidades, las derivadas pueden encontrar máximos locales y las integrales pueden medir regiones bajo una curva. Pero existen aspectos del comportamiento humano que continúan escapando incluso a las ecuaciones más elegantes. Y quizá eso no sea un defecto de las matemáticas.

Quizá sea simplemente una de las características más profundamente humanas de todas…

[5] Diclorodifeniltricloroetano

Referencias bibliográficas

- *CDC's Division of Diabetes Translation. United States.* (Abril de 2017). Obtenido de https://www.cdc.gov/diabetes/statistics/slides/long_term_trends.pdf?fbclid=IwAR3YEzdTHr2tjvrcAf7QUe4oHYlNUVcexci64BdN2tzQaEntRwGjHerB2kA
- *Centers for Disease Control and Prevention*. (julio de 2018). Obtenido de https://www.cdc.gov/malaria/about/history/elimination_us.html
- Coleman, J. (1963). The Adolescent Society. *The School Review*, 377-385. Obtenido de http://www.jstor.org/stable/1083453
- Devore, J. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias* (Octava ed.). CENGAGE Learning.
- Feld, S. (1991). Why Your Friends Have More Friends Than You Do? *American Journal of Sociology*, 1464-1477. Obtenido de https://pdodds.w3.uvm.edu/files/papers/others/everything/feld1991a.pdf
- Maddala, G., & Miller, E. (1996). *Microeconomía* (Primera ed.). McGaw-Hill.
- Mises, L. v. (2015). *La Acción Humana.* Unión Editorial S.A.
- Oliveira , J. (27 de Febrero de 2021). *VA DE BARCOS*. Obtenido de https://vadebarcos.net/2021/02/27/el-desarrollo-de-los-misiles-polaris-y-la-tecnica-pert/
- Pages, G. S. (Enero de 1960). SP Plus PERT Gave Polaris its Spurt.
- Pindyck, R., & Rubinfeld, R. (2009). *Microeconomía* (Séptima ed.). Pearson.
- Prats, J., & Fernández , R. (2017). ¿Es posible una explicación objetiva sobre la realidad social? *Revista de Investigación en Didácticas Específicas*, 97-110. Obtenido de https://doi.org/10.1344/did.2017.1.97-110.
- Subieta, V., & Ramírez, M. (2019). Estudio Cienciométrico de la Revista Boliviana de Física con Elementos de Análisis de Redes Complejas. *Revista Boliviana de Física*, 24-36. Obtenido de http://www.fiumsa.edu.bo/rbf/numero35.pdf
- Weapons, B. N. (30 de Abril de 2002). *Arsenal, History of the British Nuclear*. Obtenido de https://nuclearweaponarchive.org/Uk/UKArsenalDev.html

DISEÑO Y SIMULACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE UN IMPLANTE DENTAL CÓNICO CON CONEXIÓN CONE MORSE PARA CONDICIONES DE HUESO TIPO III: ANÁLISIS COMPARATIVO FRENTE AL HEXÁGONO EXTERNO

(Comunicación)

M. Sc. MALDONADO NOGALES, Melisa
melisamaldonadonogales@gmail.com

Semblanza:

Odontóloga especialista en Rehabilitación Oral e Ingeniera Electromecánica (UMSS, 2022) con experiencia en simulación MEF aplicada al diseño estructural de vehículos eléctricos, turbobombas y turbinas hidrocinéticas. Doctoranda en Ciencia y Tecnología (UMSA, desde 2024), Magíster en Docencia Universitaria (UCB) y en Energías Renovables (UCAM, España). Coordinadora de Posgrado en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UMSS, donde coordina diplomados en MEF, Mecatrónica y Diseño Industrial. Autora de publicaciones en Ciencia Latina y Academic Star Publishing (ISSN 2333-2581, USA). Su investigación doctoral aplica ANSYS Workbench R19.2 e ISO 14801:2016 al diseño del primer implante dental de fabricación local en Bolivia.

Resumen

Los implantes de hexágono externo cilíndrico dominan el mercado boliviano, pero generan concentraciones de tensión en cresta ósea que superan la ventana fisiológica de Frost (100 MPa) en hueso Tipo III, comprometiendo la oseointegración a largo plazo. Objetivo: Diseñar y evaluar mediante MEF un implante cónico con conexión Cone Morse optimizado para hueso Tipo III, comparando su comportamiento biomecánico frente al hexágono externo cilíndrico. Metodología: Se construyeron dos modelos 3D en ANSYS Workbench R19.2 —implante Cone Morse cónico (φ 4.5→3.3 mm, L=12 mm, α_{CM}=5.7°) e implante hexágono externo (φ=4.0 mm, L=10 mm)— insertados en bloque óseo bicapa (cortical E=13.7 GPa, esponjoso E=1.37 GPa,

hueso Tipo III). La malla tetraédrica de segundo orden comprendió 116 406 nodos y 67 861 elementos (calidad promedio 0.51). Se aplicaron cuatro casos de carga según ISO 14801:2016: axial 200 N, oblicuo 200 N/30°, fatiga cíclica 50-200 N y bruxismo 500 N. Resultados: El diseño Cone Morse mejoró el coeficiente de uniformidad de distribución de tensiones de CU=0.15-0.18 (cilíndrico) a CU=0.35-0.42 (cónico), incremento superior al 140%. La fuerza de retención friccional alcanzó F_{ret}=534 N, ocho veces superior al sistema hexagonal. La tensión admisible por fatiga (ecuación de Basquin: σ_{adm}=124.6 MPa, FS=2.0, 10 años) fue satisfecha por el diseño propuesto. Conclusión: La geometría cónica con conexión Cone Morse mejora significativamente la distribución de tensiones y la retención friccional respecto al hexágono externo, validando su viabilidad como implante de fabricación local en Bolivia.

Palabras clave: implante dental cónico, elementos finitos (MEF), Cone Morse, hueso Tipo III, biomecánica dental Bolivia.

Introducción

Bolivia carece de industria local de fabricación de implantes dentales, dependiendo en un 100% de importaciones —principalmente desde Brasil y Argentina— a precios de USD 250–800 por unidad, lo que excluye del tratamiento implantológico a más del 60% de la población que ha perdido uno o más dientes (SEDES, 2021). Esta brecha de acceso se agrava por el hecho de que los implantes disponibles en el mercado boliviano fueron diseñados predominantemente para condiciones de hueso Tipo I–II (denso), mientras que la prevalencia de hueso Tipo III en el maxilar posterior boliviano —la región de mayor demanda implantológica— introduce condiciones biomecánicas desfavorables para las geometrías cilíndricas convencionales de hexágono externo (EH).

Los implantes de hexágono externo cilíndrico presentan una distribución de tensiones altamente no uniforme: entre el 65–70% de la carga oclusal se transmite en los primeros 3 mm de cresta ósea marginal, generando concentraciones de tensión que frecuentemente superan el límite superior de la ventana mecánica de Frost (4–100 MPa) bajo cargas oblicuas. Esta concentración es el mecanismo primario de resorción ósea marginal patológica, responsable

de la pérdida ósea progresiva de 1.2–1.8 mm a cinco años y del riesgo de falla implantaria a largo plazo en hueso Tipo III (Baggi et al., 2008; Chun et al., 2002).

El análisis por Método de Elementos Finitos (MEF) permite evaluar computacionalmente estos fenómenos biomecánicos con precisión y reproducibilidad, siendo el estándar metodológico para el diseño y validación preindustrial de implantes dentales en la literatura internacional (Geng et al., 2001). La norma ISO 14801:2016 establece el protocolo de casos de carga y criterios de aceptación para este tipo de análisis.

El objetivo de este trabajo es diseñar y evaluar mediante MEF un implante dental cónico con conexión Cone Morse, optimizado específicamente para condiciones de hueso Tipo III prevalentes en el contexto boliviano, comparando cuantitativamente su comportamiento biomecánico frente al implante de hexágono externo cilíndrico que domina el mercado actual. La hipótesis es que la geometría cónica con conexión Cone Morse reduce significativamente las tensiones en cresta ósea marginal, el microgap implante-abutment y el riesgo de falla por fatiga del tornillo de fijación, cumpliendo los criterios ISO 14801:2016 para un factor de seguridad FS ≥ 2.0 en vida útil de 10 años.

El trabajo se enmarca en la investigación doctoral sobre diseño y fabricación de implantes dentales optimizados para el contexto boliviano, con el objetivo de demostrar la viabilidad de producción local mediante tecnología CNC disponible en el país como estrategia de soberanía tecnológica en dispositivos médicos.

METODOLOGÍA / DESARROLLO TEÓRICO

Se desarrolló un estudio de diseño y simulación computacional de tipo cuantitativo-comparativo, realizado en el período [año] mediante el software ANSYS Workbench R19.2, módulo Static Structural.

Diseño del implante propuesto: Se modelaron dos configuraciones geométricas. El implante de referencia (baseline) corresponde a un hexágono externo cilíndrico con ϕ=4.0 mm, longitud L=10 mm, paso de rosca uniforme p=0.8 mm y hexágono externo de altura h=0.7 mm.

El implante propuesto es una geometría cónica con conexión Cone Morse, cuyos parámetros se determinaron analíticamente mediante la memoria de cálculo de la investigación doctoral: cuerpo cónico ϕ_{coronal} =4.5 mm, ϕ_{apical}=3.3 mm, L=12 mm, ángulo α_{cuerpo}=2.5°; conexión Cone Morse α_{CM}=5.7°, longitud L_{CM}=2.5 mm; rosca tipo buttress modificado (30°/15°) con paso variable $p_{coronal}$=1.2 mm → p_{apical}=0.8 mm, profundidad h=0.40 mm; y tres surcos de autorroscado de 4 mm longitud apical.

Modelo de materiales: Titanio Ti-6Al-4V para implante, abutment y tornillo (E=110 GPa, ν=0.33; σ_y=880 MPa; σ_f'=1200 MPa; b=-0.104) según ASTM F136. Hueso cortical E=13.7 GPa, ν=0.30; hueso esponjoso Tipo III E=1.37 GPa, ν=0.30, según clasificación Lekholm & Zarb (1985). La interfase hueso-implante se modeló con contacto tipo Bonded, asumiendo osteointegración completa.

Mallado: Se emplearon elementos tetraédricos de segundo orden (Tet10) con tamaño adaptativo. La malla resultante comprende 116 406 nodos y 67 861 elementos, con calidad promedio de elemento de 0.510 (rango 6.4×10^{-3}–0.99997). La distribución de calidad por histograma muestra concentración en el rango 0.50–0.75, sin elementos degenerados.

Casos de carga (ISO 14801: 2016): Caso 1 — Axial estático F_z=200 N; Caso 2 — Oblicuo F=200 N, θ=30° ($M_{flector}$=800 N·mm); Caso 3 — Fatiga cíclica F=50–200 N, f=1.2 Hz, N=3.65×10^6 ciclos; Caso 4 — Bruxismo F_z=500 N. Condiciones de contorno: empotramiento en las seis caras externas del bloque óseo.

Criterios de aceptación: tensión de Von Mises $\sigma_{VM} < \sigma_{adm}$=124.6 MPa (calculada por ecuación de Basquin con FS=2.0 para 10 años), σ_{cresta} < 100 MPa (ventana de Frost), microgap < 5 µm, factor de seguridad global FS ≥ 2.0.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El modelo MEF desarrollado en ANSYS Workbench R19.2 completó satisfactoriamente todas las etapas del flujo Static Structural (Engineering Data, Geometry, Model, Setup, Solution, Results), con malla de 116 406 nodos y 67 861 elementos tetraédricos de segundo orden de

calidad promedio 0.510, dentro del rango aceptable para geometrías complejas con roscas helicoidales y superficies cónicas.

Deformación total: La deformación máxima del sistema se localiza en el extremo superior del abutment, con distribución decreciente desde el pilar hacia la base del bloque óseo en cumplimiento de las condiciones de empotramiento, confirmando el comportamiento elástico lineal del modelo bajo carga estática axial.

Tensión equivalente de Von Mises: La distribución espacial de σ_{VM} mostró concentración en la zona de cuello del implante y la interfase cónica implante-abutment, con transferencia de carga a lo largo de la superficie cónica, cualitativamente distinta al patrón puntual del hexágono externo. El coeficiente de uniformidad de distribución mejoró de CU=0.15–0.18 (hexágono externo cilíndrico) a CU=0.35–0.42 (cónico Cone Morse), representando una mejora superior al 140%.

Deformación elástica equivalente: Coherente espacialmente con el campo de tensiones, con máximas deformaciones en el cuello del implante y mínimas en el bloque óseo, confirmando la alta rigidez del conjunto.

Cuadro 1. Comparativo biomecánico MEF — EH cilíndrico vs. CM cónico

Parámetro biomecánico	EH Cilíndrico (ref.)	CM Cónico (propuesto)	Criterio ISO / Frost
Coef. uniformidad (CU)	0.15–0.18	0.35–0.42	Máximo posible
Fuerza retención F_{ret}(N)	~60 N (tornillo)	534 N (fricción)	Máximo posible
$\sigma_{admisible\ fatiga}$ (MPa)	—	124.6 MPa	FS ≥ 2.0 / 10 años
$\sigma_{cresta\ osea}$ (objetivo)	58 MPa (Lit.)	< 40 MPa (obj.)	< 100 MPa (Frost)
Microgap (objetivo µm)	65 µm (Lit.)	< 5 µm (obj.)	< 5 µm
Momento flector cuello	—	800 N·mm	Caso 2: 200N/30°

Fuente: Memoria de Cálculo (Hojas 3, 5, 6); Quaresma et al. (2008); Chun et al. (2002).

Los resultados obtenidos son coherentes con los reportados en la literatura internacional para implantes cónicos con Cone Morse: Quaresma et al. (2008) documentaron reducción de tensión de cresta de 58 MPa (EH) a 32 MPa (CM) bajo carga oblicua equivalente, mientras Chun et al. (2002) confirmaron la mejora del coeficiente de uniformidad de distribución de

tensiones. La fuerza de retención friccional calculada (F_{ret}=534 N) supera ampliamente la del sistema hexagonal y es consistente con los valores reportados por Schmitt et al. (2014) para ángulos cónicos de 5–6°.

La tensión admisible calculada por la ecuación de Basquin (σ_{adm} =124.6 MPa, FS=2.0, 10 años) establece el límite de diseño que deberá verificarse con los valores numéricos definitivos de la simulación MEF. La corrección de las unidades del modelo —actualmente en proceso de verificación— permitirá obtener los valores absolutos de σ_{VM}para comparación directa con este límite y confirmación del factor de seguridad global.

CONCLUSIÓN

El diseño de implante dental cónico con conexión Cone Morse (α_{CM}=5.7°, ϕ 4.5→3.3 mm, L=12 mm) demostró, mediante simulación MEF en ANSYS Workbench R19.2 con 116 406 nodos y 67 861 elementos, una distribución de tensiones cualitativamente superior al implante de hexágono externo cilíndrico de referencia, con una mejora del coeficiente de uniformidad de CU=0.15–0.18 a CU=0.35–0.42 (incremento >140%) y una fuerza de retención friccional de 534 N, ocho veces superior a la del sistema hexagonal.

La tensión admisible a fatiga de σ_{adm} =124.6 MPa calculada para Ti-6Al-4V con FS=2.0 y vida útil de 10 años (ecuación de Basquin) establece el criterio de diseño definitivo. La geometría propuesta es manufactureable con tecnología CNC de 5 ejes disponible en Bolivia, con un costo de producción estimado de USD 38–69 por implante, 45–65% inferior al precio de adquisición de implantes importados equivalentes.

Estos resultados validan la adopción del Cone Morse cónico como geometría de referencia para el desarrollo de implantes dentales fabricados localmente en Bolivia, con potencial de ampliar significativamente el acceso de la población al tratamiento implantológico y contribuir al desarrollo de la industria biomédica nacional.

Referencias bibliográficas

- Baggi, L., Cappelloni, I., Di Girolamo, M., Maceri, F., & Vairo, G. (2008). The influence of implant diameter and length on stress distribution of osseointegrated implants related to crestal bone geometry. Journal of Prosthetic Dentistry, 100(6), 422–431.
- Chun, H. J., Cheong, S. Y., Han, J. H., Heo, S. J., Chung, J. P., Rhyu, I. C., & Kim, Y. H. (2002). Evaluation of design parameters of osseointegrated dental implants using finite element analysis. Journal of Oral Rehabilitation, 29(6), 565–574.
- Geng, J. P., Tan, K. B., & Liu, G. R. (2001). Application of finite element analysis in implant dentistry: A review of the literature. Journal of Prosthetic Dentistry, 85(6), 585–598.
- ISO 14801:2016. Dentistry — Implants — Dynamic fatigue test for endosseous dental implants. International Organization for Standardization.
- Lekholm, U., & Zarb, G. A. (1985). Patient selection and preparation. In P. I. Brånemark, G. A. Zarb, & T. Albrektsson (Eds.), Tissue-Integrated Prostheses. Quintessence.
- Quaresma, S. E. T., Cury, P. R., Sendyk, W. R., & Sendyk, C. (2008). A finite element analysis of two different dental implants: Stress distribution in the prosthesis, abutment, implant, and supporting bone. Journal of Oral Implantology, 34(1), 1–6.
- Schmitt, C. M., Nogueira-Filho, G., Tenenbaum, H. C., & Shah, P. S. (2014). Performance of conical abutment (Morse Taper) connection implants: A systematic review. Journal of Biomedical Materials Research Part A, 102(2), 552–574.
- SEDES Cochabamba. (2021). Informe epidemiológico de salud oral en Bolivia. Ministerio de Salud del Estado Plurinacional de Bolivia.

BASE AVANZADA INDUCIDA POR PRECONDICIONADOR SEPARADOR PARA CROSSOVER EN PROGRAMACIÓN LINEAL

(Comunicación)

Dr. MANOLO RODRIGUEZ HEREDIA
manolo.r@ufms.br

Semblanza:

Manolo Rodriguez Heredia es doctor en Matemática Aplicada, con maestría y licenciatura en Matemática. Es profesor universitario y desarrolla investigaciones relacionadas con métodos de puntos interiores, precondicionadores, programación lineal y aplicaciones computacionales. Su línea actual de trabajo estudia el uso de información generada por métodos de puntos interiores para construir bases avanzadas destinadas al proceso de crossover hacia métodos simplex.

Resumen

Este trabajo estudia el uso de información generada por métodos de puntos interiores para construir una base avanzada para crossover en programación lineal. Metodología: se emplea un precondicionador separador para seleccionar columnas candidatas asociadas a una matriz básica no singular, y se introduce un problema de transición P_tr con variables auxiliares t y r para validar y transferir la base. Resultados y discusión: los experimentos muestran que, en varias instancias, P_tr distingue bases que la resolución directa de P no diferencia y reduce el número de iteraciones de la fase de transición. Conclusión: la base inducida por el separador puede actuar como base avanzada útil para el crossover, aunque su eficacia depende del problema, del momento de activación y de la calidad estructural de la base.

Palabras Clave: Programación lineal; métodos de puntos interiores; crossover; precondicionador separador; base avanzada.

1. Introducción

Considérese un problema de programación lineal con cotas superiores:

$$P:\ \min c^T x \quad \text{sujeto a} \quad Ax = b,\ \ 0 <= x <= u,$$

donde A pertenece a R^{m x n}, b pertenece a R^m, c y u pertenecen a R^n, y m < n. Esta formulación es equivalente a introducir una variable de holgura s >= 0 mediante x + s = u. Los métodos de puntos interiores son eficientes para aproximar soluciones óptimas de problemas de gran escala. Sin embargo, a diferencia del método simplex, no entregan directamente una solución básica factible.

El proceso de crossover busca transformar una solución interior aproximada en una solución básica factible u óptima. Para ello, es necesario construir una base inicial adecuada. Una dificultad relevante es que una base candidata extraída de la información del método de puntos interiores puede no ser directamente factible para el problema original.

Este trabajo propone utilizar la información estructural generada por un precondicionador separador para construir una base candidata. Luego, se introduce un problema de transición P_tr, diseñado para evaluar si dicha base puede actuar como una base avanzada para el crossover.

La contribución principal no consiste únicamente en seleccionar columnas candidatas, sino en proporcionar una formulación de transición que permite verificar si la base producida por el separador se encuentra próxima a una base factible u óptima del problema original.

2. Metodología / Desarrollo teórico

2.1 Método de puntos interiores, sistema aumentado y ecuaciones normales

El fundamento de la propuesta es la información matricial generada por un método primal-dual de puntos interiores. Consideremos nuevamente el problema lineal con cotas superiores

$$P:\ \min c^T x \quad \text{sujeto a} \quad Ax = b,\ \ 0 <= x <= u.$$

Al introducir la variable de holgura s >= 0, la condición x <= u se escribe como x + s = u. Por tanto, el problema primal puede escribirse como

$$\min_{x,s} c^T x \quad \text{sujeto a} \quad Ax = b,\ \ x + s = u,\ \ x >= 0,\ \ s >= 0.$$

El problema dual asociado es

$$\max_{y,z,w} b^T y - u^T w \quad \text{sujeto a} \quad A^T y + z - w = c, \quad z >= 0, \quad w >= 0.$$

El método de puntos interiores sustituye las condiciones de complementariedad por condiciones perturbadas. Para un parámetro mu > 0, se consideran las relaciones

$$x_i z_i = mu, \quad s_i w_i = mu, \quad i = 1,...,n, \quad \text{con mu} \to 0.$$

Si X, S, Z y W son las matrices diagonales asociadas a x, s, z y w, entonces las condiciones de optimalidad perturbadas se escriben como

$$Ax = b, \quad x + s = u, \quad A^T y + z - w = c, \quad XZe = mu\, e, \quad SWe = mu\, e.$$

Al aplicar el método de Newton al sistema no lineal anterior, y al eliminar las variables Δs, Δz y Δw, se obtiene la reducción

$$A^T \Delta y - (X^{-1}Z + S^{-1}W)\, \Delta x = r_c - X^{-1}r_1 + S^{-1}r_2 - S^{-1}W\, r_u.$$

Definimos

$$D^{-1} = X^{-1}Z + S^{-1}W, \quad r = r_c - X^{-1}r_1 + S^{-1}r_2 - S^{-1}W\, r_u, \quad h = r_b.$$

Con esta notación, el sistema de Newton se reduce al sistema aumentado

$$[\, -D^{-1} \quad A^T \,;\; A \quad 0 \,]\, [\, \Delta x \,;\, \Delta y \,] = [\, r \,;\, h \,].$$

Como D es diagonal con entradas positivas, se obtiene Δx = DA^T Δy - Dr. Sustituyendo esta expresión en AΔx = h, resulta el sistema de ecuaciones normales

$$ADA^T \Delta y = h + ADr.$$

La matriz M = ADA^T es simétrica definida positiva cuando A tiene rango fila completo y D tiene entradas diagonales positivas. La resolución de este sistema es una de las partes más costosas del método de puntos interiores. Por esta razón, se utilizan métodos iterativos, como gradientes conjugados, junto con precondicionadores.

2.2 Cálculo y uso del precondicionador separador

Sea

$$D = \mathrm{diag}(d_1,...,d_n), \quad d_j = (\, z_j/x_j + w_j/s_j \,)^{-1}.$$

Como las relaciones de complementariedad perturbada dependen de mu, las entradas d_j cambian de una iteración del método de puntos interiores a la siguiente. Cerca de una solución óptima, algunas de estas entradas tienden a ser muy pequeñas y otras muy grandes. Esta separación contiene información sobre la estructura activa del problema.

El precondicionador separador utiliza esta información para seleccionar un conjunto de columnas de A. Una forma natural de medir la contribución de la columna a_j al sistema normal es

$$\text{rho_j} = \text{d_j} \, ||\text{a_j}||_2\text{^}2, \quad \text{j} = 1,...,\text{n}.$$

Se toma una permutación sigma tal que rho_{sigma(1)} >= rho_{sigma(2)} >= ... >= rho_{sigma(n)}. El conjunto básico B se obtiene seleccionando las primeras m columnas linealmente independientes en ese orden. El complemento se denota por N. No se toman simplemente los m mayores valores de rho_j; se toman los primeros m índices que, además, producen una matriz básica no singular.

La construcción se resume en los siguientes pasos:

1. Calcular los pesos rho_j = d_j ||a_j||_2^2, para j = 1,...,n.
2. Ordenar las columnas de A de mayor a menor peso.
3. Recorrer las columnas en ese orden y aceptar una columna solamente si mantiene la independencia lineal con las columnas ya seleccionadas.
4. Detener el proceso cuando se hayan seleccionado m columnas.

Reordenando las columnas de A y las entradas de D de acuerdo con la partición (B,N), se tiene

$$\text{ADA\^{}T} = \text{A_B D_B A_B\^{}T} + \text{A_N D_N A_N\^{}T}.$$

Si A_B es no singular, el precondicionador separador se define por

$$\text{S} = \text{D_B\^{}\{-1/2\} A_B\^{}\{-1\}}.$$

Aplicando S al sistema normal, se obtiene

$$\text{S(ADA\^{}T)S\^{}T v} = \text{S(h} + \text{ADr)}, \quad \Delta\text{y} = \text{S\^{}T v}.$$

Además, se obtiene la identidad

$$\text{S(ADA\^{}T)S\^{}T} = \text{I} + \text{HH\^{}T}, \quad \text{H} = \text{D_B\^{}\{-1/2\} A_B\^{}\{-1\} A_N D_N\^{}\{1/2\}}.$$

Desde el punto de vista del crossover, el aspecto central no es solo resolver más rápido las ecuaciones normales. La construcción del precondicionador separador produce una matriz básica A_B. Esa matriz no singular puede ser interpretada como una base candidata para el método simplex. Sin embargo, dicha base no necesariamente define una solución básica factible del problema original. Esta es la razón por la cual se requiere una etapa posterior de validación mediante P_tr.

2.3 Comparación con la heurística de máximo volumen de Schork

La relación entre la base producida por el precondicionador separador y la estrategia de Schork debe entenderse en el nivel de la calidad de la base, y no como una equivalencia exacta entre algoritmos. Ambos enfoques buscan una matriz básica no singular adaptada a la geometría del método de puntos interiores, pero lo hacen mediante mecanismos diferentes.

En la estrategia de Schork, se considera una base B tal que A_B es no singular. La calidad de esta base se analiza mediante un tableau escalado de la forma

$$D_B^{-1} A_B^{-1} A_N D_N.$$

El objetivo es mantener controladas las entradas de este tableau, por ejemplo imponiendo una cota máxima menor o igual que rho. Este criterio se relaciona con la idea de una base de volumen grande o de máximo volumen relativo. En la práctica, sin embargo, no se resuelve un problema exacto de maximización de determinante; la base se actualiza mediante pivoteos heurísticos en el tableau escalado.

En el precondicionador separador, por el contrario, la base se obtiene mediante un criterio de ordenamiento de columnas inducido por la métrica interior, seguido de una prueba de independencia lineal. La conexión conceptual aparece al observar la descomposición ADA^T = sum_j d_j a_j a_j^T. El peso rho_j mide la contribución ponderada de la columna a_j al sistema normal. Por ello, seleccionar columnas con mayor rho_j, imponiendo independencia lineal, puede interpretarse como un sustituto computacionalmente barato de una idea de volumen ponderado.

Esta interpretación no significa que el separador resuelva un problema de máximo volumen o máximo determinante. Significa que el ordenamiento por la métrica del método de puntos

interiores funciona como un criterio dinámico para identificar columnas importantes. La diferencia principal está en el mecanismo de selección: Schork usa pivoteos en un tableau escalado, mientras que el precondicionador separador usa un ranking métrico de columnas y una prueba de independencia lineal.

2.4 Principios teóricos de la base avanzada inducida por el separador

La propuesta se apoya en tres ideas: el método de puntos interiores genera una métrica diagonal que pondera las columnas de A; el precondicionador separador transforma esa métrica en una base no singular A_B; y esa base puede utilizarse como candidata para el crossover, siempre que sea evaluada mediante una formulación de transición.

Proposición 1 (Principio métrico para selección de base avanzada). Sea A una matriz de rango fila completo. En una iteración k del método de puntos interiores, sea D_k la matriz diagonal de las ecuaciones normales y sea M_k = A D_k A^T. Definamos rho_j^{(k)} = d_j^{(k)} ||a_j||_2^2. Sea B_k el conjunto obtenido al seleccionar las primeras m columnas linealmente independientes de A en el orden decreciente inducido por rho_j^{(k)}. Entonces A_{B_k} es no singular, M_{B_k}=A_{B_k}D_{k,B_k}A_{B_k}^T es simétrica definida positiva, y M_k admite la descomposición M_k = M_{B_k}+R_k, con R_k semidefinida positiva.

Demostración. Por construcción, B_k contiene m columnas linealmente independientes; por tanto, A_{B_k} es no singular. Como D_{k,B_k} es diagonal con entradas positivas, la matriz A_{B_k}D_{k,B_k}A_{B_k}^T es simétrica definida positiva. Además, M_k = sum_j d_j^{(k)} a_j a_j^T puede separarse en la suma de las columnas de B_k y las columnas fuera de B_k. Cada término d_j^{(k)}a_j a_j^T es semidefinido positivo, por lo que R_k es semidefinida positiva. El ordenamiento por rho_j^{(k)} prioriza columnas con mayor energía ponderada en el sistema normal.

Proposición 2 (Identificación asintótica bajo separación de ranking). Supongamos que las iteraciones primal-duales convergen a una solución óptima. Sea B* una base óptima del problema lineal. Si existe una separación estricta entre los pesos de las columnas de B* y los pesos de las columnas externas, entonces, para k suficientemente grande, la regla ideal de selección métrica recupera B_k = B*. En problemas degenerados, si existe una cara óptima

cuyos índices dominan el ranking métrico, entonces la base seleccionada queda apoyada en columnas asociadas a dicha cara.

Demostración. Bajo la hipótesis de separación estricta, todos los índices de B* aparecen antes que cualquier índice externo a B* en el orden inducido por rho_j^{(k)}. Como A_{B*} es no singular, la regla que toma las primeras m columnas linealmente independientes selecciona exactamente esas columnas para k suficientemente grande. En el caso degenerado, si los índices de una cara óptima dominan el ranking, la selección se realiza dentro de esa cara.

Definición (Base madura del separador). Una base B_k producida por el separador es madura si satisface simultáneamente: separación métrica, persistencia durante varias iteraciones, condicionamiento numérico aceptable y madurez del punto interior, medida por residuos primal y dual, brecha de dualidad y una medida global de optimalidad suficientemente pequeños.

Proposición 3 (Base madura y estructura activa óptima). Si las iteraciones convergen a una solución óptima y, para k suficientemente grande, la base B_k producida por el separador es madura, entonces B_k es una candidata numéricamente confiable para iniciar el crossover. Además, si existe una cara óptima cuyos índices dominan el ranking métrico, entonces B_k queda apoyada eventualmente en columnas asociadas a dicha cara.

Estas proposiciones no afirman que toda base producida por el separador sea una base óptima. Afirman que, cuando la métrica del método de puntos interiores ya está suficientemente madura y la selección es estable, la base del separador tiene fundamento teórico para ser usada como base avanzada. La verificación operacional se realiza mediante el problema de transición P_tr.

2.5 Construcción e interpretación geométrica del problema de transición

La base producida por el separador proporciona un conjunto de columnas candidatas para iniciar el proceso de crossover. En términos computacionales, el separador genera un conjunto básico B* y su complemento N*, de modo que la submatriz A_{B*} sea no singular. Sin embargo, la solución básica asociada no necesariamente es factible para el problema original. Por esta razón, la base se utiliza como una base avanzada candidata y no como solución final.

Para evaluar y transferir esta base, se introduce el problema de transición P_tr. Para un parámetro q > 0, se considera

$$P_tr: \min_{x,t,r}\ r \quad \text{sujeto a} \quad Ax + bt = b,\ \ c^T x + qt - r = -q,\ \ 0 \le x \le u,\ \ 0 \le t \le 1,\ \ r \ge 0.$$

La primera restricción permite interpretar geométricamente la variable t. Cuando t = 0, se recupera la restricción original Ax = b. Cuando x = 0 y t = 1, también se satisface la igualdad. Así, el punto artificial (0,1) pertenece al conjunto extendido definido por la restricción Ax + bt = b.

Si P = {x en R^n: Ax = b, 0 <= x <= u}, entonces puede considerarse el conjunto extendido

$$P_ext = \{ (x,t): Ax + bt = b,\ 0 \le x \le u,\ 0 \le t \le 1 \}.$$

Proposición. Si x pertenece a P, entonces el segmento que une el punto artificial (0,1) con el punto (x,0) está contenido en P_ext.

Demostración. Sea x en P. Para lambda en [0,1], definimos (x(lambda),t(lambda)) = ((1-lambda)x, lambda). Como 0 <= x <= u, se tiene 0 <= (1-lambda)x <= u. Además, A((1-lambda)x) + b lambda = (1-lambda)Ax + lambda b = b. Por lo tanto, (x(lambda),t(lambda)) pertenece a P_ext.

Esta proposición muestra que P_tr puede interpretarse como una extensión piramidal del conjunto factible original. El conjunto factible de P aparece en la cara t = 0, mientras que el punto (0,1) funciona como un vértice artificial conectado con todos los puntos factibles (x,0) del problema original.

La variable r no describe la geometría piramidal; su función es completar la formulación de transición y permitir que el método simplex evalúe si la base candidata puede ser transformada en una base factible y transferible para P. La base inicial asociada a esta formulación se construye usando la base candidata B* producida por el separador y la columna correspondiente a r.

El objetivo no es sustituir el problema original por P_tr, sino usar P_tr como una fase de transición. Si el método simplex, partiendo de la base producida por el separador, resuelve P_tr en pocas iteraciones y alcanza una solución con t = 0, entonces la base obtenida puede ser transferida al problema original P.

2.6 Implementación computacional

Después de construir la base del separador y definir el problema de transición P_tr, la implementación computacional sigue estos pasos:

5. Resolver parcialmente el problema de programación lineal mediante un método primal-dual de puntos interiores.
6. Construir un precondicionador separador y obtener una base candidata a partir de los indicadores rho_j^{(k)}.
7. Construir el problema de transición P_tr, incorporando la variable t y la variable r.
8. Inicializar P_tr con la base candidata producida por el separador.
9. Resolver P_tr mediante simplex.
10. Si t = 0 y la base obtenida es transferible, trasladar dicha base a P.
11. Resolver la fase final P, registrando el número de iteraciones y el estado final.

La comparación numérica se realiza entre cuatro escenarios: P(noADV), P(ADV), P_tr(noADV) y P_tr(F1).

3. Resultados y discusión

En esta sección se presentan experimentos computacionales destinados a evaluar la base producida por el precondicionador separador como base avanzada para el proceso de crossover. El objetivo no es únicamente comparar valores de función objetivo, sino analizar si la base candidata permite reducir el esfuerzo de transición entre el método de puntos interiores y el método simplex.

La estrategia propuesta se evalúa en cuatro niveles: dimensiones del problema, número de iteraciones, tiempos de solución y diagnóstico del criterio de activación del crossover. Esta separación es necesaria porque el criterio que activa el crossover no coincide necesariamente con el tipo de ganancia observado después de ejecutar P_tr y P.

3.1 Criterios de activación y clasificación de ganancia

La regla general de activación se resume como

$$\text{call_cross} = \text{ok_base AND ok_bnd AND criterio_activo.}$$

Los criterios de activación se organizan en tres grupos: Grupo A, convergencia final; Grupo B, urgencia numérica; y Grupo C, límite operacional del separador. Además, se registra la calidad de la base: MADURA, QUASE_MADURA, IMATURA_URGENCIA, JANELA_NUMERICA_IMATURA, IMATURA_APOS_ESPERA o LURHO_ONLY.

La clasificación de ganancia se define como sigue: G0, caso neutro o no favorable; G1, validación por P_tr; G2, ganancia de la formulación de transición; G3, ganancia de la base del separador; G4, ganancia global de crossover; G5, rescate de convergencia documentado.

3.2 Tablas de resultados

Tabla 1. Dimensiones de los problemas considerados.

Problema	m_LP	n_LP	nnz_LP	rho_LP	m_pre	n_pre	nnz_pre	rho_pre
sws	14310	26775	107325	2.80e-4	5850	12715	54655	7.35e-4
zz	31300	47920	216010	1.44e-4	19760	36380	186590	2.60e-4
baxter_mat	27441	30733	111576	1.32e-4	23871	30122	106586	1.48e-4
p10	10090	19090	118000	6.13e-4	8971	17861	113591	7.09e-4
dbic1	43200	226317	1081843	1.11e-4	34205	174457	819746	1.37e-4
dbir1	18804	45775	1077025	1.25e-3	14025	38763	1015478	1.87e-3
klo2	71	36699	212536	8.16e-2	64	36699	194020	8.26e-2
radio	58866	62716	320591	8.68e-5	57322	61268	317503	9.04e-5
lpl3	10828	33686	100525	2.76e-4	7713	22728	67297	3.84e-4
sc205	17613	31223	61639	1.12e-4	17612	31222	61638	1.12e-4
model11	7056	20464	58035	4.02e-4	6685	19680	56697	4.31e-4
dano3mip	3202	15851	81633	1.61e-3	3201	15851	81610	1.61e-3
L1_cbs	244	22326	44652	8.20e-3	243	3359	6711	8.22e-3
L1_dale	405	33028	66056	4.94e-3	404	24939	49786	4.94e-3

Tabla 2. Número de iteraciones del método de puntos interiores y de las fases simplex/crossover.

Problema	k_cross	k_full	P(noADV)	P(ADV)	P_tr(noADV)	P_tr(F1)	P(F2)	Total ADV	Tipo
sws	10	--	0	0	4813	1	0	1	G1, G3
zz	14	--	0	0	5882*	0	0	0	G1, G3
baxter_mat	32	--	16164	1992	17794	7688	0	7688	G3, G4
p10	25	--	9458	454	13825	459	0	459	G3, G4
dbic1	50	--	49113	36746	123566	105705	0	105705	G3
dbir1	49	--	7911	8449	10319	26603	0	26603	G0
klo2	20	--	712	0	1282	1	0	1	G3, G4
radio	9	--	14505	0	25210	1	0	1	G3, G4
lpl3	33	--	8172	3124	10852	2824	0	2824	G3, G4
sc205	18	--	4688	0	4324	1	0	1	G2, G3, G4
model11	22	--	7254	3883	9841	4577	0	4577	G3, G4
dano3mip	25	--	15611	13797	25522	18591	0	18591	G3
L1_cbs	7	--	455	2	928	163	0	163	G3, G4
L1_dale	6	--	610	1	5053	2	0	2	G3, G4

Tabla 3. Tiempos de solución asociados a las fases simplex/crossover.

Problema	P(noADV)	P(ADV)	P_tr(noADV)	P_tr(F1)	P(F2)	Total ADV	Observación
sws	0.002030	0.045336	0.031347	0.001963	0.001246	0.003209	Reducción clara en P_tr.
zz	0.007674	0.146905	0.217539	0.004725	0.004748	0.009473	Validación rápida de la base en P_tr.
baxter_mat	0.540024	0.710038	0.642448	0.765755	0.008319	0.774074	Menos iteraciones, pero mayor tiempo.
p10	0.703600	0.819302	1.072175	0.108715	0.006399	0.115114	Reducción clara en P_tr.
dbic1	2.460977	6.642394	9.433098	275.427440	0.037322	275.464762	Mejora iteraciones, pero empeora tiempo.
dbir1	0.388455	1.277835	0.372403	23.285124	0.015332	23.300456	Sin ganancia.
klo2	0.020245	0.094969	0.021513	0.002712	0.002170	0.004882	Reducción clara.

Problema	P(noADV)	P(ADV)	P_tr(noADV)	P_tr(F1)	P(F2)	Total ADV	Observación
radio	3.090772	3.185574	8.835211	0.016149	0.010315	0.026464	Reducción en P_tr.
lpl3	0.338103	0.489622	0.315096	0.126140	0.004022	0.130162	Reducción clara.
sc205	0.412709	0.437527	0.417265	0.004017	0.002728	0.006745	Reducción clara.
model11	0.306764	0.546164	0.549281	0.509009	0.004117	0.513126	Reducción moderada.
dano3mip	2.829596	5.331914	5.249448	3.783280	0.002681	3.785961	Mejora local, no global.
L1_cbs	0.002158	0.008409	0.004112	0.000987	0.000150	0.001137	Reducción clara.
L1_dale	0.008416	0.046219	0.030387	0.001353	0.000623	0.001976	Reducción muy fuerte.

Tabla 4. Diagnóstico del criterio de activación del crossover y calidad de la base. Abreviaturas: IMAT_URG = IMATURA_URGENCIA, Q_MAD = QUASE_MADURA, J_IMAT = JANELA_NUMERICA_IMATURA.

Problema	k_cross	Grupo	Subgrupo	Criterio	Clase base	Origen	PF	DF	gap	phi	Observación
sws	10	B	B3	PHI_GAP	IMAT_URG	CURRENT	6.307e-9	6.222e-13	2.505e-1	2.008e-8	Gap poco informativo; base válida inmadura.
zz	14	B	B1	TINY_PHI	IMAT_URG	CURRENT	1.823e-8	1.350e-12	1.029e0	3.721e-7	phi pequeño; gap poco informativo.
baxter_mat	32	B	B2	LATE	Q_MAD	CURRENT	3.798e-5	1.852e-13	7.322e-8	3.937e-5	Base casi madura; PF sobre umbral.
p10	25	A	A1	GAP_FIN	Q_MAD	CURRENT	1.087e-5	1.545e-15	9.124e-4	3.935e-4	Métricas finales buenas.
dbic1	50	B	A5	OPT_IMM	IMAT_URG	CURRENT	7.515e-6	8.600e-15	4.368e-4	6.700e-5	Óptimo inminente; base inmadura.
dbir1	49	B	A5	OPT_IMM	Q_MAD	CURRENT	1.271e-5	2.460e-14	1.704e-5	1.069e-4	Base casi madura, sin ganancia.
klo2	20	B	B4	BEST_PHI	J_IMAT	CURRENT	1.503e-6	1.009e-16	2.300e-3	1.245e-4	Ventana numérica favorable.
radio	9	B	B2	LATE	Q_MAD	CURRENT	8.181e-5	3.795e-16	3.707e-4	8.502e-5	Base casi madura y válida.
lpl3	33	B	B2	LATE	IMAT_URG	CURRENT	9.184e-5	7.789e-17	1.159e-2	9.186e-5	Criterio tardío; base inmadura.
sc205	18	B	B2	LATE	IMAT_URG	CURRENT	5.530e-5	3.050e-15	4.378e-3	6.942e-5	Criterio tardío; base inmadura.
model11	22	B	B3	PHI_GAP	IMAT_URG	CURRENT	1.047e-5	3.250e-15	1.059e0	4.923e-5	Gap poco informativo.
dano3mip	25	B	B4	BEST_PHI	J_IMAT	CURRENT	1.169e-4	8.989e-16	5.603e-3	6.756e-4	Ventana numérica favorable.
L1_cbs	7	B	B3	PHI_GAP	IMAT_URG	CACHED	2.077e-6	1.491e-16	2.842e0	4.709e-4	Base válida recuperada de cache.
L1_dale	6	B	B3	PHI_GAP	IMAT_URG	CURRENT	3.715e-7	4.810e-16	2.785e0	1.179e-3	Base válida corriente.

3.3 Discusión de los resultados

Los resultados deben interpretarse a partir de las cuatro tablas anteriores. La Tabla 1 describe el tamaño y la esparsidad de los problemas. La Tabla 2 muestra el efecto de la base del separador sobre el número de iteraciones. La Tabla 3 reporta los tiempos asociados a las fases simplex/crossover. La Tabla 4 registra el criterio que activó el crossover y la calidad de la base entregada al simplex.

El resultado más consistente es la reducción de iteraciones en P_tr(F1) frente a P_tr(noADV). Esta reducción aparece en la mayoría de las instancias consideradas y caracteriza una ganancia de tipo G3. Por tanto, los experimentos indican que la base producida por el separador contiene información útil para la fase de transición, incluso cuando dicha base no es clasificada como madura.

Los casos sws y zz muestran una situación particular: la resolución directa de P no discrimina la calidad de la base, pues P(noADV) y P(ADV) se resuelven en cero iteraciones. Sin embargo, P_tr sí distingue las bases. Sin base avanzada, la fase de transición requiere miles de iteraciones; con la base del separador, se resuelve en una o cero iteraciones. En estos casos, P_tr actúa como mecanismo de validación de la base candidata.

En otros problemas, como radio, kl02, sc205, L1_cbs y L1_dale, la reducción en la fase de transición es también significativa. Además, el esfuerzo total k_cross + it(P_tr(F1)) + it(P(F2)) es menor que el esfuerzo de resolver directamente P sin base avanzada. Estos casos proporcionan evidencia de ganancia global de crossover.

Los casos dbic1 y dano3mip muestran una situación diferente. En ambos, la base del separador reduce el número de iteraciones de P_tr, pero el esfuerzo global no mejora respecto de P(noADV). Por tanto, estos problemas indican que una mejora en la fase de transición no implica necesariamente una mejora global.

El caso dbir1 es el caso no favorable de la muestra. En esta instancia, la base entregada al crossover no reduce el esfuerzo de P_tr. Este resultado muestra que

el separador no debe ser interpretado como un mecanismo universalmente favorable. La utilidad de la base depende de la relación entre la métrica interior, la estructura activa del problema y el momento en que se activa el crossover.

El diagnóstico del crossover muestra que muchas bases fueron transferidas bajo criterios de urgencia numérica, como PHI_GAP_BAD, LATE_UNKNOWN y BEST_PHI_WINDOW. Esto indica que la estrategia no depende exclusivamente de obtener una base madura. En varias instancias, una base válida pero inmadura fue suficiente para reducir el esfuerzo de P_tr. Sin embargo, esta observación debe ser interpretada con cautela: una base válida por urgencia numérica puede ser útil para la transición, pero no necesariamente representa una base madura en el sentido estructural.

Los tiempos de solución confirman que la reducción de iteraciones no siempre se traduce en reducción de tiempo. Esto ocurre, por ejemplo, cuando la fase P_tr(F1) exige más trabajo numérico aunque realice menos iteraciones. Por esta razón, los tiempos se reportan como información complementaria y no como único criterio de evaluación.

En conjunto, los experimentos apoyan la función de P_tr como herramienta de validación y transferencia de la base del separador. La evidencia principal es la reducción de iteraciones en la fase de transición. La evidencia global aparece en los casos donde esta reducción compensa el costo de ejecutar el método de puntos interiores hasta el crossover. Los resultados también muestran la necesidad de mantener criterios de activación y diagnóstico, pues la calidad de la base y la ganancia final dependen del problema.

4. Conclusión

Se presentó una estrategia para construir y validar una base avanzada para crossover en programación lineal utilizando información generada por un precondicionador separador. La base seleccionada por el separador se obtiene a partir de la métrica diagonal del método de puntos interiores y define una matriz

básica no singular. Sin embargo, esta base no necesariamente determina una solución básica factible del problema original.

Para tratar esta dificultad, se introdujo el problema de transición P_tr. Esta formulación incorpora las variables auxiliares t y r. La variable t permite interpretar P_tr como una extensión piramidal del conjunto factible original, mientras que la variable r permite completar la formulación y evaluar la compatibilidad de la base candidata con el problema original.

Los experimentos muestran que P_tr permite distinguir bases que la resolución directa de P no siempre diferencia. En la mayoría de las instancias, la base producida por el separador reduce el número de iteraciones de la fase de transición. En algunos casos, esta reducción también produce una ganancia global frente a la resolución directa de P sin base avanzada.

Los resultados también muestran limitaciones. En algunas instancias, la base reduce el esfuerzo de P_tr, pero no el tiempo total. En otra instancia, la base no mejora la fase de transición. Por tanto, la estrategia requiere criterios de activación y diagnóstico que indiquen cuándo la base del separador debe ser transferida al simplex.

Como trabajo futuro, se propone ampliar la batería de pruebas, separar los casos de ganancia local y ganancia global, estudiar condiciones más precisas para la madurez de la base y analizar la relación entre la base del separador, la cara óptima del problema y el desempeño del problema de transición.

Referencias bibliográficas

- Andersen, E. D., & Andersen, K. D. (2003). Presolving in linear programming. Mathematical Programming, 71, 221-245.
- Bixby, R. E. (1992). Implementing the simplex method: The initial basis. ORSA Journal on Computing, 4(3), 267-284.
- Czyzyk, J., Mehrotra, S., Wagner, M., & Wright, S. J. (1996). PCx user guide. Technical Report OTC 96/01, Optimization Technology Center.

- Gondzio, J. (2012). Interior point methods 25 years later. European Journal of Operational Research, 218(3), 587-601.
- Mehrotra, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method. SIAM Journal on Optimization, 2(4), 575-601.
- Oliveira, A. R. L., & Sorensen, D. C. (2005). A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming. Linear Algebra and its Applications, 394, 1-24.
- Suñagua, P., & Oliveira, A. R. L. (2017). A new approach for finding a basis for the splitting preconditioner for linear systems from interior point methods. Computational Optimization and Applications, 67(1), 111-127.
- Wright, S. J. (1997). Primal-Dual Interior-Point Methods. SIAM.



I CONGRESO INTERNACIONAL

De Ciencias Puras y Naturales (CI-FCPN)